баний, нормированные на одинаковое значение при $r=R$. Заметим, что при $\Gamma_1=4/3$ решение для низшей моды $\xi \propto r$ и соответствует $\omega^2=0$. Как будет показано в разд. 6.7, этот результат также имеет общий характер.

Упражнение 6.11 (с использованием ЭВМ). Найти частоты нескольких низших устойчивых пульсаций для политропы с каким-нибудь показателем n при $\Gamma_1=5/3$.

Указания. а) Сделать безразмерным уравнение на собственные значения.

б) Найти функцию Лейна — Эмдена путем одновременного интегрирования уравнения Лейна — Эмдена (3.3.6) или использовать результаты, представленные в работе Серриса [519].

в) Исследовать аналитически поведение решения вблизи $r=0$ и $r=R$.

г) Возможный метод вычисления состоит в численном интегрировании уравнения от $r=0$ и $r=R$ к какому-нибудь подходящему значению r внутри звезды с выбранным наугад значением ω^2 и граничными условиями, определенными в п.в). Так как относительная величина этих двух решений заранее неизвестна, то можно начать каждое из них с единицы. Если значение ω^2 случайно угадано правильно, то вронскиан двух решений в точке сшивания r обратится в нуль (почему?). Вообще говоря, он отличен от нуля. Выберите другое ω^2, проинтегрируйте от границ к r и вновь найдите вронскиан. Теперь надо путем интерполяции или экстраполяции найти значение ω^2, при котором вронскиан обратится в нуль. Продолжайте итерацию до тех пор, пока ω^2 не будет найдено с заданной точностью.

6.6. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мы покажем в этом разделе, что уравнение (6.5.3), которому удовлетворяет возмущение, может быть выведено из вариационного принципа. Вариационный принцип полезен для приближенного решения уравнений для возмущений. Однако для нас более важно, что вариационный принцип приводит к критериям устойчивости, которые будут использоваться далее в этой книге.

Покажем прежде всего, что оператор L_{ij} в уравнении (6.5.4) симметричен, т.е.

$$\int \eta^i L_{ij} \xi^j \, d^3x = \int \xi^i L_{ij} \eta^j \, d^3x, \tag{6.6.1}$$

где ξ^i и η^i — произвольные лагранжевы смещения. Так как

$$\eta^i \nabla_i \left(\Gamma_1 P \nabla_j \xi^j \right) = \nabla_i \left(\eta^i \Gamma_1 P \nabla_j \xi^j \right) - \Gamma_1 P \left(\nabla_i \eta^i \right) \left(\nabla_j \xi^j \right), \tag{6.6.2}$$

и

$$\left(\eta^i \nabla_i \xi^j \right) \nabla_j P = \nabla_i \left(\eta^i \xi^j \nabla_j P \right) - \left(\nabla_i \eta^i \right) \xi^j \nabla_j P - \eta^i \xi^j \nabla_i \nabla_j P, \tag{6.6.3}$$

то из (6.5.4) следует

$$\int \eta^i L_{ij} \xi^j \, d^3x = -\int \Big[\Gamma_1 P \left(\nabla_i \eta^i \right) \left(\nabla_j \xi^j \right) + \left(\nabla_j \xi^j \right) \eta^i \nabla_i P +$$

$$+ \left(\nabla_i \eta^i \right) \xi^j \nabla_j P + \eta^i \xi^j \left(\nabla_i \nabla_j P + \rho \nabla_i \nabla_j \Phi \right) + \rho \eta^i \nabla_i \delta\Phi \Big] \, d^3x. \tag{6.6.4}$$

Поверхностные члены от первых слагаемых в правых частях формул (6.6.2) и (6.6.3) обращаются в нуль, так как на поверхности $P=0$ и $\nabla_j P=0$. (Из формулы (6.1.16) следует, что $\nabla_j P=0$, если $\rho=0$ на поверхности. Если же $\rho\neq 0$, например, для несжимаемой жидкости, то мы требуем $\xi^j\nabla_j P=0$, т.е. возмущение в радиальном направлении должно быть равно нулю.) Из формулы (6.6.4) видно, что оператор L_{ij} симметричен. Заметим, что, согласно (6.3.19), последний член в правой части равен

$$\int \rho\eta^i \nabla_i \delta\Phi\, d^3x = -G\int\int \rho\rho'\eta^i \nabla_i \xi^{j'} \nabla_{j'} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x\, d^3x', \tag{6.6.5}$$

и, очевидно, симметричен.

Естественно ожидать, что лагранжиан для уравнений движения возмущений имеет вид

$$L = T_2 - V_2, \tag{6.6.6}$$

где T_2 — кинетическая энергия, а V_2 — потенциальная энергия возмущения. Индекс 2 означает, что выражение квадратично по ξ^i. Левая часть в уравнении (6.5.3) имеет вид плотности массы, умноженной на ускорение, а правая часть $L_{ij}\xi^j$ — плотности силы. Чтобы перейти от плотности силы к потенциальной энергии, следует построить скалярное произведение $\xi^i L_{ij}\xi^j$ и проинтегрировать его по объему звезды. При этом получается выражение (6.6.4) с заменой η^i на ξ^i. Таким образом, мы приходим к следующим определениям:

$$T_2 \equiv \frac{1}{2}\int \rho\left(\partial_t \xi^i\right)^2 d^3x, \tag{6.6.7}$$

$$V_2 \equiv -\frac{1}{2}\int \xi^i L_{ij}\xi^j\, d^3x = \tag{6.6.8}$$

$$= \frac{1}{2}\int\Big[\Gamma_1 P\left(\nabla_i\xi^i\right)^2 + 2\left(\nabla_j\xi^j\right)\xi^i\nabla_i P +$$

$$+\xi^i\xi^j\left(\nabla_i\nabla_j P + \rho\nabla_i\nabla_j\Phi\right) + \rho\xi^i\nabla_i\delta\Phi\Big]\, d^3x. \tag{6.6.9}$$

Проверим теперь, что функция (6.6.6) действительно является лагранжианом для уравнения (6.5.3). Так как оператор L_{ij} симметричен, то вариация действия равна

$$\delta S \equiv \delta\int L\, dt = \delta\frac{1}{2}\int\Big[\rho\left(\partial_t\xi^i\right)^2 + \xi^i L_{ij}\xi^j\Big]\, d^3x\, dt =$$

$$= \int\Big[\rho\left(\partial_t\xi^i\right)\left(\partial_t\delta\xi^i\right) + \delta\xi^i L_{ij}\xi^j\Big]\, d^3x\, dt = \int\left(-\rho\,\partial_t^2\xi^i + L_{ij}\xi^j\right)\delta\xi^i\, d^3x\, dt. \tag{6.6.10}$$

Чтобы получить последнее равенство, мы проинтегрировали по частям первый член. Таким образом, условие $\delta S = 0$ для произвольного $\delta\xi^i$ эквивалентно уравнению движения (6.5.3). Отметим, что символ δ в указанном вариационном принципе относится к обычной вариации функции между соседними траекториями движения, связывающими фиксированные начальную и конечную точки[1].

Упражнение 6.12. Показать, что энергия колебаний на фоне первоначально статической конфигурации

$$E_2 = T_2 + V_2 \tag{6.6.11}$$

постоянна во времени. Использовать равенство $\partial L_{ij}/\partial t = 0$.

Замечание. Фридман и Шутц [209] показали непосредственным вычислением, что $E_2 \equiv \delta^2 E$, т.е. энергия колебаний равна вариации второго порядка для функционала энергии, данного в формуле (6.4.1).

Упражнение 6.13. Используя формулу (6.6.9), показать, что для радиальных возмущений сферической звезды

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^R \left\{ \Gamma_1 P\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\xi\right)\right]^2 + \frac{4}{r}\xi^2\frac{dP}{dr}\right\} 4\pi r^2\, dr. \tag{6.6.12}$$

Указания. Исключить производные Φ, используя формулы (6.1.4) и (6.1.16). Подставить выражение (6.3.20) для $\nabla_i\delta\Phi$ и проинтегрировать по частям член с d^2P/dr^2.

Упражнение 6.14. По определению

$$I \equiv \frac{1}{2}\int \rho\xi^i\xi^i\, d^3x. \tag{6.6.13}$$

Доказать теорему вириала для возмущений, т.е.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = T_2 - V_2. \tag{6.6.14}$$

6.7. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для малых отклонений от равновесия имеем

$$E = E_0 + E_2, \tag{6.7.1}$$

где E_0 — энергия равновесного состояния, а первая вариация $\delta E \equiv E_1$ обращается в нуль, так как в равновесном состоянии энергия экстремальна. Вторая вариация равна

$$E_2 \equiv \delta^2 E = T_2 + V_2 \equiv \delta^2 T + \delta^2(U + W), \tag{6.7.2}$$

где T_2 и V_2 даны в формулах (6.6.7) и (6.6.8).

[1] См., например, книгу Голдстейна [232], гл. 2.