Чтобы получить последнее равенство, мы проинтегрировали по частям первый член. Таким образом, условие $\delta S = 0$ для произвольного $\delta\xi^i$ эквивалентно уравнению движения (6.5.3). Отметим, что символ δ в указанном вариационном принципе относится к обычной вариации функции между соседними траекториями движения, связывающими фиксированные начальную и конечную точки[1].

Упражнение 6.12. Показать, что энергия колебаний на фоне первоначально статической конфигурации

$$E_2 = T_2 + V_2 \tag{6.6.11}$$

постоянна во времени. Использовать равенство $\partial L_{ij}/\partial t = 0$.

Замечание. Фридман и Шутц [209] показали непосредственным вычислением, что $E_2 \equiv \delta^2 E$, т.е. энергия колебаний равна вариации второго порядка для функционала энергии, данного в формуле (6.4.1).

Упражнение 6.13. Используя формулу (6.6.9), показать, что для радиальных возмущений сферической звезды

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^R \left\{ \Gamma_1 P \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\xi\right)\right]^2 + \frac{4}{r}\xi^2\frac{dP}{dr} \right\} 4\pi r^2\, dr. \tag{6.6.12}$$

Указания. Исключить производные Φ, используя формулы (6.1.4) и (6.1.16). Подставить выражение (6.3.20) для $\nabla_i \delta\Phi$ и проинтегрировать по частям член с d^2P/dr^2.

Упражнение 6.14. По определению

$$I \equiv \frac{1}{2}\int \rho \xi^i \xi^i\, d^3x. \tag{6.6.13}$$

Доказать теорему вириала для возмущений, т.е.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = T_2 - V_2. \tag{6.6.14}$$

6.7. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для малых отклонений от равновесия имеем

$$E = E_0 + E_2, \tag{6.7.1}$$

где E_0 — энергия равновесного состояния, а первая вариация $\delta E \equiv E_1$ обращается в нуль, так как в равновесном состоянии энергия экстремальна. Вторая вариация равна

$$E_2 \equiv \delta^2 E = T_2 + V_2 \equiv \delta^2 T + \delta^2 (U + W), \tag{6.7.2}$$

где T_2 и V_2 даны в формулах (6.6.7) и (6.6.8).

[1] См., например, книгу Голдстейна [232], гл. 2.

Неустойчивость соответствует неограниченному росту малого начального возмущения (ξ^i, $\partial_t \xi^i$). (Заметим, что начальными данными, определяющими эволюцию возмущения, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка (6.5.3), являются обе величины, ξ^i и $\partial_t \xi^i$.) В качестве другого критерия неустойчивости можно принять также неограниченный рост кинетической энергии T_2.

Поскольку мы рассматриваем динамическую устойчивость (т.е. пренебрегаем всеми эффектами, обусловленными диссипативными силами), то E_2 — сохраняющаяся величина (см. упражнение 6.12). Предположим теперь, что функция $V_2(t)$ положительна для всех возмущений. Так как $E_2 = T_2 + V_2$ и T_2 — положительно определенная функция, она не может неограниченно возрастать. Таким образом, устойчивость обеспечена, если $V_2(t)$ — положительно определенная функция для всех $\xi^i(\mathbf{x}, t)$.

Обратное утверждение доказано в приложении Б: если для некоторого $\xi^i(\mathbf{x}, t)$ величина V_2 отрицательна, то возникает неустойчивость.

Так как в любой момент времени возмущение $\xi^i(\mathbf{x}, t)$ определяет начальные данные для последующей эволюции, то критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом. *Необходимым и достаточным условием устойчивости является положительная определенность потенциальной энергии V_2 для всех начальных данных.*

Критерий устойчивости можно выразить также на языке энергии. Если величина E_2, которая сохраняется и потому может быть задана, например, в момент $t = 0$, положительна при всех начальных данных (ξ^i, $\partial_t \xi^i$), то она положительна, в частности, при $\partial_t \xi^i = 0$ и любых значениях ξ^i. Таким образом, потенциальная энергия V_2 положительна и система устойчива. Обратно, если E_2 при каких-то начальных данных (ξ^i, $\partial_t \xi^i$) отрицательна, то потенциальная энергия V_2 может стать отрицательной и возникает неустойчивость. Таким образом, $\delta^2 E \geqslant 0$ — необходимое и достаточное условие устойчивости.

Критерий устойчивости можно связать также с разложением по нормальным модам колебаний. Временна́я зависимость нормальной моды имеет вид

$$\xi^i(\mathbf{x}, t) = \xi^i(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \tag{6.7.3}$$

и неустойчивость возникает при $\omega^2 < 0$. Уравнение движения для нормальной моды имеет вид (6.5.5). Умножая это уравнение на $\xi^i(\mathbf{x})$, интегрируя по всему объему звезды и используя формулы (6.6.8) и (6.6.13), получаем

$$\omega^2 = \frac{V_2}{I}. \tag{6.7.4}$$

Поскольку величина I всегда положительна, то положительность V_2 эквивалентна условию $\omega^2 \geqslant 0$ и гарантирует устойчивость. Появление неустойчивости определяется условием $\omega^2 = 0$ (соответствующая мода называется *нейтральной*). Это происходит при $V_2 = 0$, т.е. при обращении в нуль E_2.

Мы получили важный результат: формула (6.7.4) содержит в себе вариационный принцип для нормальных мод:

$$I\,\delta\omega^2 = \delta V_2 - \frac{V_2}{I}\delta I = \delta V_2 - \omega^2\,\delta I$$

$$= -\int \delta\xi^i\left(L_{ij}\xi^j + \omega^2\rho\xi^i\right) d^3x. \tag{6.7.5}$$

Таким образом, из условия $\delta\omega^2 = 0$ следует уравнение движения для нормальной моды (6.5.5). Следовательно, мы пришли к новой процедуре определения нормальных мод колебаний звезды: следует искать смещения $\xi^i(\mathbf{x})$, которые соответствуют экстремуму функционала в (6.7.5). При этом собственные частоты находятся из формулы (6.7.4).

Важное приложение полученных результатов относится к радиальным смещениям в сферической звезде. Используя формулу (6.6.12) для V_2, получаем

$$\omega^2 = \frac{\int_0^R \left\{\Gamma_1 P \frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\xi\right)\right]^2 + 4r\xi^2\frac{dP}{dr}\right\} dr}{\int_0^R \rho\xi^2 r^2\, dr}. \tag{6.7.6}$$

Покажем теперь, что звезда устойчива, если усредненное с учетом давления значение Γ_1, которое мы обозначаем $\overline{\Gamma}_1$, превышает 4/3, и неустойчива, если $\overline{\Gamma}_1 < 4/3$. Границе устойчивости отвечает $\overline{\Gamma}_1 = 4/3$, при этом $\omega^2 = 0$.

Рассмотрим прежде всего звезду, для которой $\Gamma_1 = 4/3$ по всему объему. Уравнение (6.5.6) имеет решение без узлов (основная мода) следующего вида:

$$\omega^2 = 0, \qquad \xi = \text{const} \times r. \tag{6.7.7}$$

Упражнение 6.15. Проверить, что формула (6.7.7) дает решение уравнения (6.5.6) при $\Gamma_1 = 4/3$.

Другими словами, звезда с $\Gamma_1 = 4/3$ находится на границе устойчивости относительно гомологической (т.е. автомодельной) деформации. Предположим теперь, что Γ_1 несколько отличается от 4/3 в различных точках звезды. Тогда решение уравнения (6.5.6), отвечающее границе устойчивости, имеет вид

$$\xi(r) = r\left[1 + \mathcal{O}\left(\Gamma_1 - \tfrac{4}{3}\right)\right]. \tag{6.7.8}$$

Таким образом, если подставить в (6.7.6) пробную функцию $\xi(r) = r$, то ошибка в определении ω^2 будет иметь порядок величины $(\Gamma_1 - 4/3)^2$. (Напомним, что функционал в (6.7.6) связан с вариационным принципом, и потому ошибка в собственном значении пропорциональна квадрату ошибки в собственной функции.) Таким образом, числитель в (6.7.6) дает

$$\omega^2 \propto 9\int_0^R \Gamma_1 Pr^2\,dr - 12\int_0^R Pr^2\,dr, \tag{6.7.9}$$

где второй член получен интегрированием по частям. Итак,

$$\omega^2 \propto 3\overline{\Gamma}_1 - 4, \tag{6.7.10}$$

где

$$\overline{\Gamma}_1 \equiv \frac{\int_0^R \Gamma_1 Pr^2\,dr}{\int_0^R Pr^2\,dr} \tag{6.7.11}$$

— показатель адиабаты, усредненный с учетом давления. Из формулы (6.7.10) виден характер перехода от устойчивого к неустойчивому состоянию при падении $\overline{\Gamma}_1$ ниже граничного значения 4/3.

Можно непосредственно убедиться, что для политропы с $\Gamma = 4/3 = \Gamma_1$ гомологическое расширение или сжатие звезды не выводит ее из состояния равновесия. Применим гомологическое преобразование

$$P' = AP, \qquad \rho' = B\rho, \qquad r' = Cr, \tag{6.7.12}$$

к уравнению гидростатического равновесия

$$\frac{dP}{dr} = -G\rho\frac{m}{r^2}, \tag{6.7.13}$$

и в качестве дополнительного условия учтем постоянство полной массы m. При этом мы получим два условия, касающиеся масштабных множителей,

$$AC = B, \qquad BC^3 = 1. \tag{6.7.14}$$

Исключая отсюда C, имеем

$$A = B^{4/3}, \tag{6.7.15}$$

или, согласно уравнению (6.7.12),

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{4/3}, \tag{6.7.16}$$

т.е. $\Gamma_1 = 4/3$ при $\Gamma = 4/3$.

Упражнение 6.16.

а) Показать, что частота радиальных колебаний ω может быть выражена через момент инерции звезды I и полную гравитационную потенциальную энергию W следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{|W|}{I}\left(3\overline{\Gamma}_1 - 4\widetilde{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2}\Big/\overline{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2}\right), \tag{6.7.17}$$

где

$$I \equiv \int_0^M r^2\,dm, \qquad \overline{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \equiv \frac{1}{I}\int_0^M \xi^2\,dm,$$

$$\widetilde{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \equiv \frac{1}{|W|}\int_0^M \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 \frac{Gm}{r}\,dm, \qquad |W| \equiv \int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm,$$

$$\overline{\Gamma}_1 \equiv \frac{1}{9}\,\frac{\overline{(\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1}}{\overline{(\xi/r)^2}}, \qquad \overline{(\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1} \equiv \frac{\int_0^R (\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1 P 4\pi r^2\,dr}{\int_0^R P 4\pi r^2\,dr}.$$

Указание. Использовать формулу (3.2.3).

б) Показать, что если Γ_1 близко к 4/3, то определенные выше средние значения $(\xi/r)^2$ примерно равны друг другу, и потому

$$\omega^2 \simeq \frac{|W|}{I}\left(3\overline{\Gamma}_1 - 4\right). \tag{6.7.18}$$

6.8. ТОЧКИ ПОВОРОТА И ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Предположим, что имеется однопараметрическая последовательность равновесных звезд с одним и тем же уравнением состояния, но различными центральными плотностями. Каков смысл максимума или минимума на кривой зависимости $E_{\rm eq}$ от ρ_c (т.е. критических точек или точек поворота, в которых $dE_{\rm eq}/d\rho_c = 0$)?

Ясно, что наличие такой критической точки означает, что существуют близкие равновесные конфигурации, для которых

$$E_{\rm eq}(\rho_c + \Delta\rho_c) = E_{\rm eq}(\rho_c) \tag{6.8.1}$$

с точностью до членов первого порядка. Соседние конфигурации получаются из первоначальной при некотором лагранжевом смещении ξ, вызванном изменением центральной плотности[1] $\Delta\rho_c$. В общем случае

$$E[\xi] = E_0 + E_1[\xi] + E_2[\xi], \tag{6.8.2}$$

где $E_n[\xi]$ — вклад членов порядка ξ^n в увеличение энергии при отходе от $E_0 = E_{\rm eq}\rho_c$. Так как E_0 отвечает равновесному состоянию, то $E_1[\xi] = 0$ (см., например, формулу (6.4.9)). Энергия $E(\xi)$ также отвечает равновесной конфигурации, если энергия конфигурации стационарна относительно возму-

---

[1] Заметим, что поскольку смещения ξ переводят одну равновесную конфигурацию в другую, то в этом случае $\Gamma_1 = \Gamma$. Выводы этого раздела зависят от указанного равенства. Обсуждение поведения системы вблизи точек поворота при $\Gamma_1 \neq \Gamma$ см. в работе Торна [567].