где

$$I \equiv \int_0^M r^2\,dm, \qquad \overline{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \equiv \frac{1}{I}\int_0^M \xi^2\,dm,$$

$$\widetilde{\left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \equiv \frac{1}{|W|}\int_0^M \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 \frac{Gm}{r}\,dm, \qquad |W| \equiv \int_0^M \frac{Gm}{r}\,dm,$$

$$\overline{\Gamma}_1 \equiv \frac{1}{9}\,\frac{\overline{(\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1}}{\widetilde{(\xi/r)^2}}, \qquad \overline{(\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1} \equiv \frac{\int_0^R (\nabla\cdot\xi)^2\Gamma_1 P 4\pi r^2\,dr}{\int_0^R P 4\pi r^2\,dr}.$$

Указание. Использовать формулу (3.2.3).

б) Показать, что если Γ_1 близко к 4/3, то определенные выше средние значения $(\xi/r)^2$ примерно равны друг другу, и потому

$$\omega^2 \simeq \frac{|W|}{I}\left(3\overline{\Gamma}_1 - 4\right). \tag{6.7.18}$$

6.8. ТОЧКИ ПОВОРОТА И ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Предположим, что имеется однопараметрическая последовательность равновесных звезд с одним и тем же уравнением состояния, но различными центральными плотностями. Каков смысл максимума или минимума на кривой зависимости E_{eq} от ρ_c (т.е. критических точек или точек поворота, в которых $dE_{\text{eq}}/d\rho_c = 0$)?

Ясно, что наличие такой критической точки означает, что существуют близкие равновесные конфигурации, для которых

$$E_{\text{eq}}(\rho_c + \Delta\rho_c) = E_{\text{eq}}(\rho_c) \tag{6.8.1}$$

с точностью до членов первого порядка. Соседние конфигурации получаются из первоначальной при некотором лагранжевом смещении ξ, вызванном изменением центральной плотности[1] $\Delta\rho_c$. В общем случае

$$E[\xi] = E_0 + E_1[\xi] + E_2[\xi], \tag{6.8.2}$$

где $E_n[\xi]$ — вклад членов порядка ξ^n в увеличение энергии при отходе от $E_0 = E_{\text{eq}}\rho_c$. Так как E_0 отвечает равновесному состоянию, то $E_1[\xi] = 0$ (см., например, формулу (6.4.9)). Энергия $E(\xi)$ также отвечает равновесной конфигурации, если энергия конфигурации стационарна относительно возму-

---

[1] Заметим, что поскольку смещения ξ переводят одну равновесную конфигурацию в другую, то в этом случае $\Gamma_1 = \Gamma$. Выводы этого раздела зависят от указанного равенства. Обсуждение поведения системы вблизи точек поворота при $\Gamma_1 \neq \Gamma$ см. в работе Торна [567].

щений *второго порядка*, т.е. $E_2(\xi)=0$ для указанных смещений ξ. Но как следует из предыдущего параграфа, это условие означает наличие моды с нулевой частотой, $\omega^2=0$, что соответствует границе устойчивости.

Простейший способ использовать этот критерий на практике состоит в том, чтобы установить устойчивость звезд на одном из концов последовательности (обычно в области малых плотностей). Тогда критическая точка указывает значение плотности, при котором возникает неустойчивость. Далее в этом разделе будет показано, как обобщается этот метод при наличии нескольких критических точек.

Метод критических точек можно применять также к кривой зависимости равновесной массы от ρ_c. Один из способов убедиться в этом состоит в нахождении зависимости M от ρ_c с помощью вариационного принципа, $\delta E=0$, где

$$E = \int u\, dm - \int \frac{Gm}{r} dm. \tag{6.8.3}$$

Обозначая различные произведения числовых множителей через $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$, получаем из соображений размерности

$$E = \langle u\rangle M - \alpha_1 \frac{GM^2}{R}. \tag{6.8.4}$$

Полагая $\Gamma_1=\Gamma$ в адиабатическом уравнении состояния

$$P = K\rho^\Gamma, \tag{6.8.5}$$

получаем

$$u = \frac{K\rho^{\Gamma-1}}{\Gamma-1}, \tag{6.8.6}$$

так что

$$\langle u\rangle = \alpha_2 K\rho_c^{\Gamma-1}. \tag{6.8.7}$$

Также из соображений размерности

$$R = \alpha_3\left(\frac{M}{\rho_c}\right)^{1/3}, \tag{6.8.8}$$

так что

$$E = \alpha_2 KM\rho_c^{\Gamma-1} - \alpha_4 GM^{5/3}\rho_c^{1/3}. \tag{6.8.9}$$

Равновесие определяется условием $dE/d\rho_c=0$ при постоянном M; отсюда следует

$$M \propto \rho_c^{(\Gamma-4/3)(3/2)}. \tag{6.8.10}$$

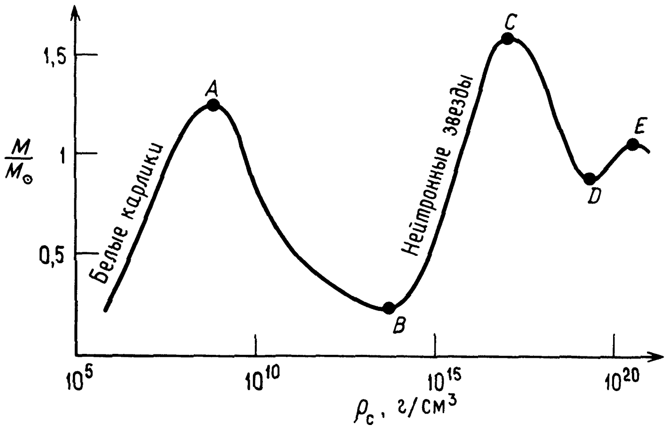

Рис. 6.2. График, показывающий критические точки в зависимости массы звезды от плотности в ее центре для равновесных конфигураций холодного вещества.

Таким образом,

$$\frac{dM}{d\rho_c} \propto \Gamma - \frac{4}{3}. \tag{6.8.11}$$

Если в семействе звездных конфигураций есть только одна критическая точка и конфигурации устойчивы при малых плотностях, то из формул (6.7.10) и (6.8.11) следует, что при $dM/d\rho_c > 0$ равновесные конфигурации устойчивы, а конфигурации с $dM/d\rho_c < 0$ — неустойчивы[1].

Выбор величины ρ_c в качестве параметра, описывающего последовательность равновесных моделей, в данном случае несуществен; также удобно представлять M как функцию R. При этом мы можем рассмотреть случай кратных критических точек. Как было указано выше, интерес представляет прежде всего устойчивость основной радиальной моды, которая не имеет узлов внутри звезды. В этом случае собственная функция в критической точке — это просто лагранжево смещение ξ, которое переводит равновесную конфигурацию при плотности ниже критической в равновесную конфигурацию при плотности выше критической. При таком движении ρ_c возрастает, так что вблизи центра звезды ξ отрицательно. Так как величина ξ не имеет узлов, то она должна быть отрицательна и вблизи поверхности. Таким образом, R падает при увеличении ρ_c в критической точке, где основная мода изменяет устойчивость. (Вообще, $dR/d\rho_c < 0$ при изменении устойчивости моды с четным числом узлов и $dR/d\rho_c > 0$ для моды с нечетным числом узлов.)

[1] Более строгое доказательство этого результата приводится Тассулем [559], с. 149.

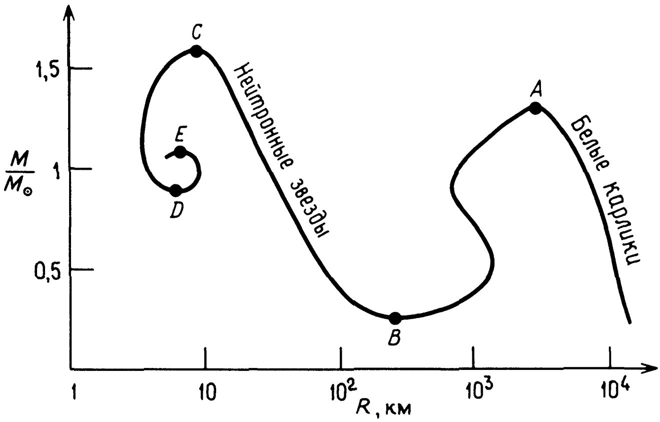

Рис. 6.3. График, показывающий точки поворота в зависимости массы звезды от ее радиуса для равновесных конфигураций холодного вещества.

Диаграмма зависимости M от ρ_c с кратными критическими точками показана на рис. 6.2, зависимость M от R показана на рис. 6.3. При малой плотности (большом радиусе) все моды устойчивы. Первой появляется критическая точка А, соответствующая максимальной массе белого карлика. Так как R падает с ростом ρ_c, то четная мода изменяет устойчивость. Поскольку $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \ldots$ и $\omega_n^2 > 0$ при малой плотности, то единственная возможность состоит в том, что величина ω_0^2 становится отрицательной. В точке В четная мода изменяет устойчивость ($dR/d\rho_c < 0$). Величина ω_2^2 не может стать отрицательной, так как ω_1^2 не изменила знак. Поэтому величина ω_0^2 должна опять стать положительной: точка В соответствует минимальной массе нейтронной звезды. Критическая точка С аналогична А, и ω_0^2 вновь становится отрицательной: эта точка соответствует максимальной массе нейтронной звезды. В точке D устойчивость изменяет нечетная мода. Единственная возможность состоит в том, что ω_1^2 становится отрицательной. В точке Е устойчивость изменяет четная мода. Величина ω_0^2 не может стать положительной, так как ω_1^2 все еще отрицательна, поэтому ω_2^2 становится отрицательной.

Упражнение 6.17. Используя рассуждение, аналогичное приведенному выше, убедитесь, что для любого вида зависимости M от R при условии, что все моды устойчивы при низкой плотности, справедливо следующее утверждение: изгиб диаграммы в критической точке против часовой стрелки указывает на появление неустойчивости при возрастании ρ_c, изгиб диаграммы по часовой стрелке указывает на переход неустойчивой моды в устойчивую.

Отметим, что критерий $dM/d\rho_c > 0 (< 0)$ для определения устойчивости (неустойчивости) имеет ограниченную применимость: например, отрезок D − E неустойчив, хотя $dM/d\rho_c > 0$. Однако для типичных уравнений состояния холодного вещества наинизшая плотность, при которой $dM/d\rho_c = 0$ и $d^2M/d\rho_c^2 < 0$, соответствует максимальной массе и плотности устойчивого белого карлика (например, точка А на рис. 6.2). Следующая точка, в которой $dM/d\rho_c = 0$ и $d^2M/d\rho_c^2 < 0$, соответствует максимальной массе и плотности устойчивой нейтронной звезды (например, точка С на рис. 6.2). Эти результаты будут часто использоваться в дальнейшем.

РЕЗЮМЕ 6.1

Ньютоновское равновесие и устойчивость невращающихся звезд

1. Вариационный принцип для гидростатического равновесия: $\delta E = 0$ [см. формулу (6.4.9)]. Вариация производится при фиксированной массе покоя и постоянной энтропии.

2. Поведение малых возмущений относительно равновесного состояния определяется уравнением (6.5.3) или (6.5.5) (для нормальных мод). Радиальные моды колебаний в сферической звезде являются решением задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения (6.5.6).

3. Динамика возмущений выводится из вариационного принципа с лагранжианом $L = T_2 - V_2$ [формулы (6.6.7) и (6.6.8)].

4. Следующие критерии устойчивости эквивалентны:

а) $V_2 \geqslant 0$ для всех возмущений;

б) $\delta^2 E \equiv E_2 \geqslant 0$ для всех возмущений;

в) $\omega^2 \geqslant 0$ для всех мод колебаний;

г) $\bar{\Gamma}_1 \geqslant 4/3$ только для радиальной устойчивости (6.7.11).

5. Некоторые нормальные моды нарушают устойчивость, если $dE_{eq}/d\rho_c = 0$ или $dM/d\rho_c = 0$ (разд. 6.8).

6.9. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Почти все результаты предыдущих разделов сохраняются и в общей теории относительности, если заменить E на Mc^2 — полную энергию, заключенную в массе звезды [261]. В частности:

1. Среди всех конфигураций с данным полным числом барионов N равновесию отвечает экстремум M (о постоянстве N см. замечание в конце упражнения 6.8). Можно показать, что в данном однопараметрическом семействе равновесных состояний величины M и N имеют экстремум в одной и той же точке (см. упражнение 6.8в), поэтому эквивалентная задача сводится к отысканию экстремума величины

$$E \equiv Mc^2 - m_B N. \qquad (6.9.1)$$