Отметим, что критерий $dM/d\rho_c > 0(<0)$ для определения устойчивости (неустойчивости) имеет ограниченную применимость: например, отрезок D – E неустойчив, хотя $dM/d\rho_c > 0$. Однако для типичных уравнений состояния холодного вещества наинизшая плотность, при которой $dM/d\rho_c = 0$ и $d^2M/d\rho_c^2 < 0$, соответствует максимальной массе и плотности устойчивого белого карлика (например, точка A на рис. 6.2). Следующая точка, в которой $dM/d\rho_c = 0$ и $d^2M/d\rho_c^2 < 0$, соответствует максимальной массе и плотности устойчивой нейтронной звезды (например, точка C на рис. 6.2). Эти результаты будут часто использоваться в дальнейшем.

РЕЗЮМЕ 6.1

Ньютоновское равновесие и устойчивость невращающихся звезд

1. Вариационный принцип для гидростатического равновесия: $\delta E = 0$ [см. формулу (6.4.9)]. Вариация производится при фиксированной массе покоя и постоянной энтропии.

2. Поведение малых возмущений относительно равновесного состояния определяется уравнением (6.5.3) или (6.5.5) (для нормальных мод). Радиальные моды колебаний в сферической звезде являются решением задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения (6.5.6).

3. Динамика возмущений выводится из вариационного принципа с лагранжианом $L = T_2 - V_2$ [формулы (6.6.7) и (6.6.8)].

4. Следующие критерии устойчивости эквивалентны:

а) $V_2 \geqslant 0$ для всех возмущений;

б) $\delta^2 E \equiv E_2 \geqslant 0$ для всех возмущений;

в) $\omega^2 \geqslant 0$ для всех мод колебаний;

г) $\bar{\Gamma}_1 \geqslant 4/3$ только для радиальной устойчивости (6.7.11).

5. Некоторые нормальные моды нарушают устойчивость, если $dE_{\text{eq}}/d\rho_c = 0$ или $dM/d\rho_c = 0$ (разд. 6.8).

6.9. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Почти все результаты предыдущих разделов сохраняются и в общей теории относительности, если заменить E на Mc^2 — полную энергию, заключенную в массе звезды [261]. В частности:

1. Среди всех конфигураций с данным полным числом барионов N равновесию отвечает экстремум M (о постоянстве N см. замечание в конце упражнения 6.8). Можно показать, что в данном однопараметрическом семействе равновесных состояний величины M и N имеют экстремум в одной и той же точке (см. упражнение 6.8в), поэтому эквивалентная задача сводится к отысканию экстремума величины

$$E \equiv Mc^2 - m_{\mathrm{B}}N. \qquad (6.9.1)$$

2. Поведение малых радиальных отклонений от равновесия определяется задачей Штурма—Лиувилля, аналогичной формуле (6.5.6).

3. Для устойчивости необходима положительность второй вариации M. Эквивалентное условие: $\omega_0^2 > 0$.

4. Состояние устойчивости меняется в критических точках зависимости M_{eq} от R, или M_{eq} от ρ_c. Анализ проводится так же, как в конце разд. 6.8.

5. Поскольку уравнение для ω^2 отличается от выведенного в случае ньютоновской механики, то критерий $\bar{\Gamma}_1 > 4/3$ уже неприменим для установления устойчивости. Но если релятивистские поправки малы ($GM/Rc^2 \ll 1$), то новый критерий имеет вид

$$\bar{\Gamma}_1 - \frac{4}{3} > \kappa \frac{GM}{Rc^2}, \tag{6.9.2}$$

где κ — число порядка единицы, зависящее от внутреннего строения звезды. В целом эффект общей теории относительности сводится к *нарушению устойчивости*, так как сила тяготения становится больше, облегчая переход к коллапсу.

Оставшаяся часть этой главы будет посвящена выводу величины κ для важного случая, когда звездная конфигурация близка к политропе с $n=3$, так что $\Gamma = \Gamma_1 \simeq 4/3$. Мы найдем также соответствующую плотность звездного вещества в критической точке[1]. Запишем полную энергию в виде

$$E = E_{\text{Newt}} + \Delta E_{\text{GTR}}, \tag{6.9.3}$$

где E_{Newt} — ньютоновская энергия звезды, а ΔE_{GTR} — поправка, обусловленная общей теорией относительности. Минимум энергии отвечает равновесной конфигурации, а вторая производная дает возможность решить вопрос об устойчивости.

Окончательное выражение для ΔE_{GTR} дано в (6.9.32); читатель, согласный принять его на веру, может сразу переходить к этой формуле. В этом разделе мы принимаем $c=G=1$.

Для сферического распределения материи, находящейся в покое в данный момент, полная масса имеет вид [см. (5.7.8)]

$$M = \int_0^R \rho 4\pi r^2\, dr. \tag{6.9.4}$$

Здесь

$$\rho = \rho_0(1+u). \tag{6.9.5}$$

Полное число барионов в звезде равно

$$N = \int_0^R n\, d\mathcal{V}, \tag{6.9.6}$$

[1] Наш вывод следует книге Зельдовича и Новикова [636].

где

$$d\mathcal{V} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} 4\pi r^2\, dr \tag{6.9.7}$$

— элемент собственного объема в геометрии Шварцшильда [см. формулу (5.7.9)]. Энергия звезды (за вычетом энергии, связанной с массой покоя) определяется согласно формуле (6.9.1):

$$E = \int_0^R \left[\rho\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} - \rho_0\right] d\mathcal{V}, \tag{6.9.8}$$

где мы использовали обозначение $\rho_0 = m_B n$. Подставляя сюда выражение (6.9.5) и считая u и m/r малыми, получим с точностью до членов второго порядка

$$E = \int_0^R \rho_0\left[u - \frac{m}{r} - u\frac{m}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] d\mathcal{V}. \tag{6.9.9}$$

Отметим, что величина $\rho_0 d\mathcal{V}$ инвариантна и расширение на нее не влияет. Ньютоновская энергия имеет вид

$$E_{\text{Newt}} = \int_0^R \rho_0 u\, d\mathcal{V} - \int_0^M \frac{m'}{r'}\, dm', \tag{6.9.10}$$

где

$$dm' = \rho_0\, d\mathcal{V}, \tag{6.9.11}$$

$$r' = \left(\frac{3\mathcal{V}}{4\pi}\right)^{1/3}. \tag{6.9.12}$$

Заметим, что в силу формул (6.9.5) и (6.9.7) функции $m'(\mathcal{V})$ и $r'(\mathcal{V})$ отличаются от соответствующих релятивистских выражений. Попробуем вычислить энергию звезды вначале по общей теории относительности, а затем согласно теории Ньютона, а разность этих двух выражений обозначим ΔE_{GTR}. Как мы можем удостовериться, учитывая неоднозначность выбора координат в общей теории относительности, в том, что в обоих случаях имеем дело с одной и той же величиной? Иными словами, если даны две совершенно одинаковые звезды и нужно вычислить для одной из них E, а для другой — E_{Newt}, то как установить, что эти звезды действительно тождественны?

Ответ состоит в том, что тождественные звезды содержат одинаковые числа барионов в данном собственном объеме (это утверждение не зависит от выбора координат). Следовательно, $\rho_0(\mathcal{V})$ — это одна и та же функция и в теории относительности и теории Ньютона.

Вычитая формулу (6.9.10) из (6.9.9), получаем

$$\Delta E_{\text{GTR}} = \int_0^R \rho_0\, d\mathcal{V}\left[-u\frac{m}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{r}\right)^2 + \frac{m'}{r'} - \frac{m}{r}\right]. \tag{6.9.13}$$

Упражнение 6.18. Используя формулу (6.9.7), показать, что с точностью до членов первого порядка

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi r^3}{3}\left(1 + \frac{3}{r^3}\int_0^r mr\,dr\right). \tag{6.9.14}$$

Из формул (6.9.12) и (6.9.14) следует

$$r' - r = \frac{1}{r^2}\int_0^r mr\,dr. \tag{6.9.15}$$

Также с точностью до членов первого порядка получаем

$$m'(\mathcal{V}) - m(\mathcal{V}) = \int_0^{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\left[\rho_0 - \rho\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}\right]$$

$$= -\int_0^{\mathcal{V}} \rho_0\, d\mathcal{V}\left(u - \frac{m}{r}\right). \tag{6.9.16}$$

Теперь в формуле (6.9.13) можно написать

$$\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m' - m}{r'} - \frac{m(r' - r)}{rr'} \tag{6.9.17}$$

и подставить сюда выражения (6.9.15) и (6.9.16). Мы последовательно сохраняли все члены второго порядка, поэтому, вычисляя теперь интегралы с ньютоновскими выражениями для ρ_0, r, $\mathcal{V}$ и т.д., мы получим результат с погрешностью лишь в членах третьего порядка. Итак,

$$\Delta E_{\mathrm{GTR}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \tag{6.9.18}$$

где

$$I_1 = -\int_0^M u\frac{m}{r}\,dm, \tag{6.9.19}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^M \left(\frac{m}{r}\right)^2 dm, \tag{6.9.20}$$

$$I_3 = -\int_0^M \frac{dm}{r}\int_0^m u\,dm, \tag{6.9.21}$$

$$I_4 = \int_0^M \frac{dm}{r}\int_0^m \frac{m}{r}\,dm, \tag{6.9.22}$$

$$I_5 = -\int_0^M \frac{m\,dm}{r^4}\int_0^r mr\,dr. \tag{6.9.23}$$

Эти выражения можно упростить, полагая, что распределение по массе соответствует политропе с показателем n, т.е.

$$u = n\frac{P}{\rho_0} \tag{6.9.24}$$

и

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dP}{dr} = -\frac{m}{r^2}. \tag{6.9.25}$$

Упражнение 6.19.

а) Показать, что при выполнении условий (6.9.24) и (6.9.25)

$$I_5 = \frac{1}{n}I_1. \tag{6.9.26}$$

Указание. Подставить $-m dm/r^4 = 4\pi dP$ и проинтегрировать по частям.

б) При тех же условиях показать, что

$$I_4 = 2I_2 - \frac{2}{n}I_1 - \frac{3}{n}I_3. \tag{6.9.27}$$

Указание. Подставить $m dm/r = -4\pi r^3 dP$, проинтегрировать по частям, чтобы получить два члена, затем первый член вновь проинтегрировать по частям и исключить P, используя формулу (6.9.24).

в) Показать также, что

$$I_3 = I_1 - \frac{2n}{n+1}(I_2 + I_4). \tag{6.9.28}$$

Указание. Проинтегрировать $u dm$ по частям, показать, что

$$du = n\, dP/[\rho_0(n+1)] = nm\, d(1/r)/(n+1),$$

и затем проинтегрировать по частям еще раз.

Комбинируя формулы (6.9.26)→(6.9.28), получаем

$$\Delta E_{\mathrm{GTR}} = \frac{5 + 2n - n^2}{n(5-n)}2I_1 + \frac{n-1}{5-n}3I_2. \tag{6.9.29}$$

Интегралы I_1 и I_2 можно привести к безразмерному виду с помощью соответствующих подстановок для политропы, как в разд. 3.3. В результате

$$\Delta E_{\mathrm{GTR}} = -kM^{7/3}\rho_c^{2/3}, \tag{6.9.30}$$

где

$$k = \frac{(4\pi)^{2/3}}{(5-n)\left[\xi_1^2|\theta'(\xi_1)|\right]^{7/3}}\left[-\frac{5+2n-n^2}{(n+1)}2\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^{n+1}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(n-1)\int_0^{\xi_1}\xi^4\theta'^2\theta^n\,d\xi\right]. \qquad (6.9.31)$$

Упражнение 6.20. Проверить формулы (6.9.30) и (6.9.31).

Интегралы в (6.9.31) вычисляются численно, политропные функции при этом находятся либо путем одновременного решения уравнения Лейна — Эмдена, либо из результатов Сервиса [519]. Для случая $n=3$ имеем

$$\Delta E_{\rm GTR} = -0{,}918294\, M^{1/3}\rho_c^{2/3}. \qquad (6.9.32)$$

6.10. УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Чтобы исследовать устойчивость белого карлика с учетом эффектов общеи теории относительности, запишем полную энергию в виде

$$E = E_{\rm int} + E_{\rm grav} + \Delta E_{\rm int} + \Delta E_{\rm GTR}. \qquad (6.10.1)$$

В первом приближении присутствуют только два первых члена. Их можно найти для политропного распределения плотности.

$$E_{\rm int} = \int u\,dm = \int \frac{nP}{\rho}dm = K\rho_c^{1/n}M\frac{n}{|\xi_1^2\theta'|}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^{n+1}\,d\xi. \qquad (6.10.2)$$

$$E_{\rm grav} = -G\int\frac{m}{r}dm = (4\pi\rho_c)^{1/3}\frac{GM^{5/3}}{|\xi_1^2\theta'|^{5/3}}\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^n\,d\xi. \qquad (6.10.3)$$

Последний интеграл преобразуется к виду

$$\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^n\,d\xi = \frac{1}{n+1}\int_0^{\xi_1}\xi^3\frac{d}{d\xi}\theta^{n+1}\,d\xi = -\frac{3}{n+1}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^{n+1}\,d\xi \qquad (6.10.4)$$

и может быть вычислен с помощью интегрирования по частям. В сущности это уже было сделано при выводе формулы (3.2.11), где для политропы было получено

$$E_{\rm grav} = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \qquad (6.10.5)$$