где

$$k = \frac{(4\pi)^{2/3}}{(5-n)\left[\xi_1^2|\theta'(\xi_1)|\right]^{7/3}}\left[-\frac{5+2n-n^2}{(n+1)}2\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^{n+1}\,d\xi\ +\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}(n-1)\int_0^{\xi_1}\xi^4\theta'^2\theta^n\,d\xi\right]. \qquad (6.9.31)$$

Упражнение 6.20. Проверить формулы (6.9.30) и (6.9.31).

Интегралы в (6.9.31) вычисляются численно, политропные функции при этом находятся либо путем одновременного решения уравнения Лейна — Эмдена, либо из результатов Сервиса [519]. Для случая $n=3$ имеем

$$\Delta E_{\mathrm{GTR}} = -0{,}918294\, M^{1/3}\rho_c^{2/3}. \qquad (6.9.32)$$

6.10. УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Чтобы исследовать устойчивость белого карлика с учетом эффектов общеи теории относительности, запишем полную энергию в виде

$$E = E_{\mathrm{int}} + E_{\mathrm{grav}} + \Delta E_{\mathrm{int}} + \Delta E_{\mathrm{GTR}}. \qquad (6.10.1)$$

В первом приближении присутствуют только два первых члена. Их можно найти для политропного распределения плотности.

$$E_{\mathrm{int}} = \int u\,dm = \int\frac{nP}{\rho}\,dm = K\rho_c^{1/n}M\frac{n}{|\xi_1^2\theta'|}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^{n+1}\,d\xi. \qquad (6.10.2)$$

$$E_{\mathrm{grav}} = -G\int\frac{m}{r}\,dm = (4\pi\rho_c)^{1/3}\frac{GM^{5/3}}{|\xi_1^2\theta'|^{5/3}}\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^n\,d\xi. \qquad (6.10.3)$$

Последний интеграл преобразуется к виду

$$\int_0^{\xi_1}\xi^3\theta'\theta^n\,d\xi = \frac{1}{n+1}\int_0^{\xi_1}\xi^3\frac{d}{d\xi}\theta^{n+1}\,d\xi = -\frac{3}{n+1}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^{n+1}\,d\xi \qquad (6.10.4)$$

и может быть вычислен с помощью интегрирования по частям. В сущности это уже было сделано при выводе формулы (3.2.11), где для политропы было получено

$$E_{\mathrm{grav}} = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}. \qquad (6.10.5)$$

Из результата, приведенного в упражнении 3.4, получаем

$$\frac{M}{R^3} = \frac{4\pi\rho_c|\theta'|}{\xi_1}, \tag{6.10.6}$$

следовательно,

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5-n} GM^{5/3}\rho_c^{1/3}\left|\frac{4\pi\theta'}{\xi_1}\right|^{1/3}. \tag{6.10.7}$$

Сравнивая этот результат с формулами (6.10.3) и (6.10.4), получаем

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2\theta^{n+1}\,d\xi = \frac{n+1}{5-n}\xi_1^3|\theta'|^2. \tag{6.10.8}$$

Таким образом,

$$E_{\text{int}} = k_1 K\rho_c^{1/n} M, \tag{6.10.9}$$

$$E_{\text{grav}} = -k_2 G\rho_c^{1/3} M^{5/3}, \tag{6.10.10}$$

где

$$k_1 = \frac{n(n+1)}{5-n}\frac{|\xi_1^2\theta'|}{\xi_1} = 1{,}75579, \tag{6.10.11}$$

$$k_2 = \frac{3}{5-n}\frac{|4\pi\xi_1^2\theta'|^{1/3}}{\xi_1} = 0{,}639001. \tag{6.10.12}$$

Численные значения k_1 и k_2 даны здесь для $n=3$.

Член ΔE_{int} обусловлен отличием уравнения состояния от политропы с $n=3$, которое связано с тем, что электроны не полностью релятивистские. Внутренняя энергия на единицу массы равна

$$u = \frac{\varepsilon_e - m_e c^2 n_e}{\rho}, \tag{6.10.13}$$

где

$$\rho = \rho_0 = \mu_e m_u n_e. \tag{6.10.14}$$

Используя формулу (2.3.20), получаем

$$u = \frac{3}{4}\frac{m_e c^2}{\mu_e m_u}\left(x - \frac{4}{3} + \frac{1}{x} + \cdots\right), \tag{6.10.15}$$

где $x \gg 1$ — релятивистский параметр.

Пропорциональный x член в формуле (6.10.15) равен просто $3P/\rho$, это выражение было использовано выше при вычислении E_{int}. Следующий член — постоянный; его можно опустить при использовании вариационного принципа, так что поправка равна

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{4}\frac{m_e c^2}{\mu_e m_u}\int \frac{1}{x}\,dm. \tag{6.10.16}$$

Согласно формулам (6.10.14) и (2.3.4),

$$x = \left(\frac{3\pi^2\rho\lambda_e^3}{\mu_e m_u}\right)^{1/3}. \tag{6.10.17}$$

Интеграл в (6.10.16) можно вычислить с распределением плотности, отвечающим политропе с $n=3$; вносимая при этом ошибка имеет более высокий порядок. Таким образом,

$$\Delta E_{\text{int}} = k_3 \frac{m_e^2 c^3}{\hbar(\mu_e m_u)^{2/3}} M\rho_c^{-1/3}, \tag{6.10.18}$$

где

$$k_3 = \frac{3}{4}\frac{1}{(3\pi^2)^{1/3}}\frac{1}{|\xi_1^2\theta'|}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^2\,d\xi. \tag{6.10.19}$$

При $n=3$ этот интеграл равен 4,32670, так что

$$k_3 = 0{,}519723. \tag{6.10.20}$$

Поправка, обусловленная общей теорией относительности, по формуле (6.9.32) равна

$$\Delta E_{\text{GTR}} = -k_4 \frac{G^2}{c^2} M^{7/3}\rho_c^{2/3}, \tag{6.10.21}$$

$$k_4 = 0{,}918294. \tag{6.10.22}$$

Таким образом, полная энергия, определенная в (6.10.1), имеет вид

$$E = (AM - BM^{5/3})\rho_c^{1/3} + CM\rho_c^{-1/3} - DM^{7/3}\rho_c^{2/3}, \tag{6.10.23}$$

где

$$A = k_1 K, \quad B = k_2 G, \quad C = k_3 \frac{m_e^2 c^3}{\hbar(\mu_e m_u)^{2/3}}, \quad D = k_4 \frac{G^2}{c^2}. \tag{6.10.24}$$

Равновесие достигается при $\partial E/\partial\rho_c=0$. Отсюда следует

$$(AM - BM^{5/3})\tfrac{1}{3}\rho_c^{-2/3} - \tfrac{1}{3}CM\rho_c^{-4/3} - \tfrac{2}{3}DM^{7/3}\rho_c^{-1/3} = 0. \quad (6.10.25)$$

Основное приближение соответствует отбрасыванию членов, пропорциональных C и D. При этом для массы получается формула Чандрасекара:

$$M = \left(\frac{A}{B}\right)^{3/2} = 1{,}457\left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2} M_\odot, \quad (6.10.26)$$

где для K мы воспользовались формулой (2.3.23). Члены с C и D дают зависящие от ρ_c малые поправки к M.

Устойчивость нарушается при $\partial^2 E/\partial\rho_c^2$, т.е. при

$$-\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}(AM - BM^{5/3})\rho_c^{-5/3} + \tfrac{1}{3}\tfrac{4}{3}CM\rho_c^{-7/3} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{3}DM^{7/3}\rho_c^{-4/3} = 0. \quad (6.10.27)$$

Решим уравнение (6.10.25) относительно $AM-BM^{5/3}$ и подставим результат в (6.10.27). Поскольку теперь все величины одного порядка малости, можно заменить M на $(A/B)^{3/2}$. В результате

$$\rho_c = \frac{CB^2}{DA^2} = \frac{16k_3k_2^2}{(3\pi^2)^{2/3}k_4k_1^2}\frac{m_u^2\mu_e^2}{\lambda_e^3 m_e}$$

$$= 2{,}646 \times 10^{10}\left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2 \text{ г/см}^3 . \quad (6.10.28)$$

Это критическая плотность, при которой белый карлик теряет устойчивость из-за эффектов общей теории относительности. Заметим, что для ^{56}Fe ($\mu_e=2{,}154$) получается $\rho_c=3{,}07\cdot 10^{10}$ г/см^3. Это значение выше порога обратного β-распада, $1{,}14\cdot 10^9$ г/см^3 (см. табл. 3.1), так что общая теория относительности не нужна для железных белых карликов. Для ^{4}He или ^{12}C плотность ρ_c принимает значение $2{,}65\cdot 10^{10}$ г/см^3, которое ниже порогов нейтронизации, $1{,}37\cdot 10^{11}$ и $3{,}90\cdot 10^{10}$ г/см^3 соответственно. В этих случаях плотность в центре ограничена именно эффектами общей теории относительности[1)].

Упражнение 6.21. Энергия звезды со значением Γ вблизи 4/3 также записывается в виде [ср. формулу (6.8.9)]

$$E = \alpha M\rho_c^{\Gamma-1} - k_2GM^{5/3}\rho_c^{1/3} - k_4\frac{G^2}{c^2}M^{7/3}\rho_c^{2/3}. \quad (6.10.29)$$

[1)] Ядерные реакции при высокой плотности (см. разд. 3.5) ограничивают плотность в углеродных белых карликах, $\rho_c \lesssim 1\cdot 10^{10}$ г/см^3, но точное значение этой границы неизвестно. (См. разд. 3.7.)

Здесь α — некоторая постоянная. Показать, что критическое значение Г, при котором нарушается устойчивость, благодаря эффектам общей теории относительности увеличивается так, что

$$\Gamma - \frac{4}{3} = 1{,}125\left(\frac{2GM}{Rc^2}\right). \tag{6.10.30}$$

Указание. Исключить α, используя условие $\partial E/\partial\rho_c = 0$.

Упражнение 6.22. Какое максимальное гравитационное красное смещение предсказывается для сферического белого карлика, состоящего из ^{4}He, ^{12}C, ^{56}Fe? Сравните ваши результаты с работой Шапиро и Тьюколски [532].

Упражнение 6.23. Вычислить $\Delta M/M_{\rm Ch}$, относительную разность масс белого карлика и звезды в пределе Чандрасекара при критической плотности (6.10.28).

Результаты, приведенные в формулах (6.7.18) и (6.10.30), можно объединить, записав приближенную формулу:

$$\omega^2 \simeq \frac{|W|}{I}\left[\left(3\bar{\Gamma}_1 - 4\right) - \beta\frac{|W|}{Mc^2}\right], \tag{6.10.31}$$

где β — числовой множитель. В случае белых карликов с малой массой преобладает первый член. Основная частота колебаний возрастает при увеличении массы ($\omega^2 \sim G\rho$). Период колебаний падает от значений порядка 20 с при $M = 0{,}4M_\odot$ до 6 с при $M = 1M_\odot$.

Упражнение 6.24. Показать, что для ультрарелятивистского вырожденного электронного газа

$$\Gamma_1 - \frac{4}{3} \simeq \frac{2}{3x^2}. \tag{6.10.32}$$

Из этой формулы вытекает, что первый член в скобках в (6.10.31) ведет себя как $\rho^{-2/3}$, т.е. как R^2, при $M \to M_{\rm Ch}$. Однако $|W|/I \sim R^{-3}$, поэтому ω^2 продолжает расти при $M \to M_{\rm Ch}$; ньютоновские белые карлики устойчивы. Член, обусловленный общей теорией относительности в (6.10.31), меняется как $1/R$; из-за него ω^2 проходит через максимум и затем меняет знак — звезда теряет устойчивость. Соответствующий минимальный период колебаний составляет около 2 с (см., например, [139]). Это значение очень важно, ибо позволяет исключить возможность интерпретации пульсаров как пульсирующих белых карликов: известны пульсары с весьма малыми периодами — вплоть до 1,56 мс.