Глава 7

Вращение и магнитные поля

7.1. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Мы дадим здесь сводку уравнений магнитной гидродинамики (см., например, книгу Джексона [297]).

Если вещество находится под действием электромагнитных сил, то уравнение Эйлера (6.1.2) принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{7.1.1}$$

Здесь $\mathbf{J}$ — плотность тока и $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля. В астрофизике вещество редко обладает ненулевым полным зарядом. Поэтому, вообще говоря, в уравнение следует добавить член $\rho_e \mathbf{E}$, где ρ_e — плотность заряда, которым мы пренебрегли. Если скорость движения вещества $\mathbf{v}$ намного меньше, чем скорость света (в астрофизике чаще всего так и бывает), то в уравнении Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{7.1.2}$$

можно пренебречь током смещения. Тогда

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \tag{7.1.3}$$

Используя векторное тождество

$$\tfrac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \tag{7.1.4}$$

уравнение (7.1.1) можно переписать в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi - \frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \tag{7.1.5}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ обычно связано с током $\mathbf{J}$ и магнитным полем $\mathbf{B}$ законом Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \tag{7.1.6}$$

Здесь σ — проводимость, которая считается постоянной. Формула (7.1.6) обобщает соотношение $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, справедливое в покоящейся системе отсчета, и учитывает член первого порядка по v/c.

Изменение поля **B** во времени определяется законом Фарадея:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{7.1.7}$$

который, с учетом формул (7.1.6) и (7.1.2), а также уравнения $\nabla \mathbf{B} = 0$, приводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 \mathbf{B}. \tag{7.1.8}$$

Нередко проводимость можно принимать бесконечно большой, так как времена, характерные для омических потерь, велики по сравнению с временами процессов, которые мы сейчас рассматриваем. Такая среда называется «идеально проводящей»; в этом случае из (7.1.6) следует

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0, \tag{7.1.9}$$

и формула (7.1.8) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{7.1.10}$$

Это уравнение интерпретируется следующим образом: магнитный поток через любой контур, движущийся вместе с идеально проводящей средой, не меняется со временем — силовые линии «вморожены» в вещество[1)].

При рассмотрении эффектов магнитного поля в белых карликах оказалась полезной скалярная теорема вириала. Умножим скалярно уравнение (7.1.5) на радиус-вектор **x** и проинтегрируем по всему объему звезды V. Поскольку $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, то

$$\mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) - v^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - v^2. \tag{7.1.11}$$

Следовательно, левая часть уравнения (7.1.5) принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} - 2T, \tag{7.1.12}$$

где $I = \int \rho x^2 d^3x$ — обобщенный момент инерции, а

$$T = \frac{1}{2}\int \rho v^2 \, d^3x \tag{7.1.13}$$

---

1) Точнее говоря, из (7.1.10) следует, что магнитный поток $\phi_M \equiv \int_S \mathbf{B} dS$ через любую замкнутую поверхность S, движущуюся вместе с веществом, постоянен. При этом элемент среды, который вначале был нанизан на магнитную силовую линию, остается на ней навсегда.

— кинетическая энергия. Мы воспользовались здесь тем фактом, что

$$\frac{d}{dt}\int_V Q\rho\, d^3x = \int_V \rho \frac{dQ}{dt} d^3x \qquad (7.1.14)$$

для любой величины Q в сплошной среде.

Член, содержащий давление, приводится к виду

$$-\int \mathbf{x}\cdot\nabla P\, d^3x = -\int \nabla\cdot(\mathbf{x}P)\, d^3x + \int P\nabla\cdot\mathbf{x}\, d^3x = 0 + 3\Pi, \qquad (7.1.15)$$

где

$$\Pi = \int P\, d^3x. \qquad (7.1.16)$$

Здесь мы учли, что на границе объема V давление P обращается в нуль. Гравитационный член записывается в виде

$$\begin{aligned} -\int \rho\mathbf{x}\cdot\nabla\Phi\, d^3x &= G\iint d^3x\, d^3x'\, \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}\cdot\nabla\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= -G\iint d^3x\, d^3x'\, \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \\ &= -\frac{1}{2}G\iint d^3x\, d^3x'\, \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) = W. \end{aligned} \qquad (7.1.17)$$

Это гравитационная потенциальная энергия.

Аналогично формуле (7.1.15) можно показать, что член, пропорциональный ∇B^2, приводится к виду $3\,\mathfrak{M}$, где

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8\pi}\int B^2\, d^3x \qquad (7.1.18)$$

— магнитная энергия. Мы устремили границу объема V к бесконечности, чтобы оправдать отбрасывание поверхностного члена.

Так как $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\cdot(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} &= (\mathbf{B}\cdot\nabla)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\cdot(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{x} \\ &= \nabla\cdot[\mathbf{B}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{B})] - B^2. \end{aligned} \qquad (7.1.19)$$

При интегрировании по всему пространству содержащий дивергенцию первый член обращается в нуль, поэтому интеграл от выражения вида (7.1.19) дает вклад $-2\mathfrak{M}$. В итоге получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + W + 3\Pi + \mathfrak{M}. \tag{7.1.20}$$

Отметим, что величина П равна 2/3 тепловой энергии нерелятивистских частиц плюс 1/3 тепловой энергии релятивистских частиц.

Предполагая, что звезда находится в равновесии, мы приходим к скалярной формулё вириала

$$2T + W + 3\Pi + \mathfrak{M} = 0. \tag{7.1.21}$$

7.2. МАГНИТНЫЕ БЕЛЫЕ КАРЛИКИ

Ограничимся вначале невращающимися белыми карликами. В этом случае кинетическая энергия $T=0$, и теорема вириала (7.1.21) принимает вид

$$W + 3\Pi + \mathfrak{M} = 0, \tag{7.2.1}$$

т.е.

$$W + 3M\left\langle \frac{P}{\rho} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{8\pi} \right\rangle \frac{4}{3}\pi R^3 = 0, \tag{7.2.2}$$

где угловые скобки означают усреднение. В пределе высокой проводимости магнитный поток

$$\phi_M \sim \langle B \rangle R^2 \tag{7.2.3}$$

сохраняется при изменении радиуса звезды. В случае нерелятивистского вырождения $P \sim \rho^{5/3}$, а при ультрарелятивистском вырождении $P = \rho^{4/3}$. Соответственно по соображениям размерности из (7.2.2) в первом случае следует

$$0 = -\alpha_{3/2}\frac{GM^2}{R} + \beta_{3/2}\frac{M^{5/3}}{R^2} + \gamma_{3/2}\frac{\Phi_M^2}{R}, \tag{7.2.4}$$

а при ультрарелятивистском вырождении

$$0 = -\alpha_3\frac{GM^2}{R} + \beta_3\frac{M^{4/3}}{R} + \gamma_3\frac{\Phi_M^2}{R}, \tag{7.2.5}$$

где нижний индекс у безразмерных положительных констант α, β и γ указывает показатель политропы, $n=3/2$ или $n=3$, описывающий каждый из этих двух режимов.

В обоих случаях эффект магнитного поля состоит в некотором растяжении звезды. Грубо говоря, добавление магнитного потока эквивалентно