

в предположении, что $R_i \sim R_\odot$. Следовательно,

$$\frac{\mathcal{M}_i}{|W_i|} \sim \frac{\mathcal{M}_{\text{wd}}}{|W_{\text{wd}}|}, \quad (7.2.17)$$

и величина этого отношения не превосходит нескольких процентов.

Хотя и нет данных, которые бы свидетельствовали в пользу существования таких полей¹⁾, они не исключаются проведенными наблюдениями. Более того, сжатие «типичного» межзвездного облака с радиусом $\sim 0,1$ пс, массой $\sim 1M_\odot$ и замороженным полем B величиной $3 \cdot 10^{-6}$ Гс при образовании звезды из этого вещества должно приводить к магнитным полям порядка 10^8 Гс (см. [549], разд. 13.3е).

Результаты Острикера и Хартвика показывают, что с увеличением поля радиус возрастает, а ρ_c падает. В принципе магнитные поля умеренной величины могут существенным образом влиять на зависимость радиуса от массы, особенно для более массивных белых карликов.

Однако до сих пор наблюдения не давали свидетельств в пользу столь сильных внутренних магнитных полей. Радиус звезды Сириус В в точности соответствует кривой Хамады — Солпитера для звезд с нулевым полем (см. разд. 3.6). Приблизительно 5% из числа наблюдаемых белых карликов обладают поверхностными магнитными полями в диапазоне 10^6 — 10^8 Гс (см., например, [13, 343]). Величина соответствующего внутреннего магнитного поля зависит от модели; вероятно, она должна лежать в пределах 10^8 — 10^{10} Гс. Такие поля слишком слабы, чтобы существенно влиять на динамику при $M \leq M_\odot$.

7.3. ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ: СФЕРОИДЫ МАКЛОРЕНА

Наши представления о вращающихся гравитирующих телах основаны главным образом на изучении эллипсоидов с однородной плотностью, динамика которых анализируется сравнительно просто (подробное изложение можно найти в книге Чандрасекара [116]). Простейшие однородные эллипсоиды такого типа — *сфероиды Маклорена*, вращающиеся с однородной угловой скоростью.

В произвольной точке (x, y, z) внутри однородного эллипсоида гравитационный потенциал является квадратичной функцией координат:

$$\Phi = -\pi G\rho [A - A_1x^2 - A_2y^2 - A_3z^2], \quad (7.3.1)$$

где постоянные A зависят только от формы эллипсоида, и $A_1 + A_2 + A_3 = 2$. Это следует из уравнения Пуассона,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (7.3.2)$$

¹⁾ Магнитные А-звезды имеют поля $\leq 10^4$ Гс на поверхности.

где плотность ρ постоянна. Коэффициенты A можно найти изящным геометрическим методом (см., например, [116]). В случае сфероида потенциал Φ можно найти также с помощью функции Грина для уравнения (7.3.2):

$$\Phi = -G\rho \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (7.3.3)$$

Функция Грина разлагается в сферических полярных координатах так:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + [\text{члены, зависящие от } \phi], \quad (7.3.4)$$

где P_l — полином Лежандра, $r_{<}$ ($r_{>}$) — меньшая (большая) из величин r и r' . В силу азимутальной симметрии зависящие от ϕ члены не дают вклада в интеграл в (7.3.3). В полярных координатах поверхность сфероида описывается уравнением $R = R(\theta)$, где

$$\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} = \frac{1}{R^2}, \quad (7.3.5)$$

где a и c — большая и малая полуоси соответственно. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi = & -2\pi G\rho \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' P_l(\cos \theta') \times \\ & \times \left(\int_0^{r'} \frac{(r')^{l+2} dr'}{r^{l+1}} + \int_r^R \frac{r^l dr'}{(r')^{l-1}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Заметим прежде всего, что все члены с нечетным l выпадают, так как P_l является здесь нечетной функцией $\cos \theta'$, в то время как $R(\theta)$ — четная функция. Среди интегралов отличны от нуля только те, в которых $l=0$ или $l=2$: для членов с $l \geq 4$ степени $\cos \theta'$, обусловленные зависимостью $R(\theta)$, никогда не превосходят $l-2$, так что из-за соотношения ортогональности эти члены обращаются в нуль при интегрировании. Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi = & -2\pi G\rho \left\{ -\frac{1}{3}r^2 + \int_0^1 \frac{dx}{1/a^2 + (1/c^2 - 1/a^2)x^2} - \right. \\ & \left. - (3\cos^2 \theta - 1) \frac{r^2}{4} \int_0^1 dx (3x^2 - 1) \lg \left[\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) x^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

где $x = \cos \theta'$. Эти интегралы вычисляются в элементарных функциях, и после некоторых выкладок мы приходим к окончательному ответу:

$$A_1 = A_2 = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2},$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2} - \frac{2(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e,$$

$$A = \frac{2a^2(1 - e^2)^{1/2}}{e} \arcsin e, \quad (7.3.8)$$

где эксцентриситет, по определению, равен

$$e^2 \equiv 1 - \frac{c^2}{a^2}. \quad (7.3.9)$$

В гидростатическом равновесии для однородно вращающегося сфероида справедливо уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (7.3.10)$$

где

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (7.3.11)$$

Левая часть уравнения (7.3.10) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= (v_j \partial_j) v_i = (\varepsilon_{jkl} \Omega_k x_l \partial_j) \varepsilon_{imn} \Omega_m x_n = \varepsilon_{jkl} \Omega_k x_l \varepsilon_{imj} \Omega_m \\ &= (\delta_{ki} \delta_{lm} - \delta_{km} \delta_{li}) \Omega_k x_l \Omega_m = \Omega_i (x_m \Omega_m) - \Omega^2 x_i. \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

Считая, что угловая скорость направлена по оси z , перепишем эту формулу в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\Omega^2 (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (7.3.13)$$

Легко видеть, что это просто центростремительное ускорение жидкости. Итак, проекция уравнения (7.3.10) на ось z дает

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (7.3.14)$$

а проекция на ось x дает

$$-\Omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (7.3.15)$$

Так как Φ — квадратичная функция координат, P также должно быть квадратичной функцией. Поскольку P обращается в нуль на границе сфероида, получаем

$$P = P_c \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad (7.3.16)$$

где P_c — давление в центре сфероида. Используя формулу (7.3.1), из уравнения (7.3.14) получаем

$$P_c = \pi G \rho^2 c^2 A_3. \quad (7.3.17)$$

Из уравнения (7.3.15) следует

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= 2\pi G \rho \left(A_1 - \frac{A_3 c^2}{a^2} \right) \\ &= 2\pi G \rho \left[\frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} (3 - 2e^2) \arcsin e - \frac{3(1 - e^2)}{e^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

Момент инерции сфероида относительно оси вращения равен

$$I = \frac{2}{5} M a^2, \quad (7.3.19)$$

где

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e^2)^{1/2} \rho. \quad (7.3.20)$$

Соответственно момент количества движения

$$J = I \Omega, \quad (7.3.21)$$

и кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} I \Omega^2. \quad (7.3.22)$$

Упражнение 7.1. Показать, что гравитационная потенциальная энергия сфероида Маклорена имеет вид

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho \int \Phi d^3x \\ &= -\frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 G \rho^2 a^5 \frac{\arcsin e}{e} (1 - e^2). \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Отметим одно соотношение, полезное для параметризации сфероидов Маклорена:

$$\frac{T}{|W|} = \frac{3}{2e^2} \left(1 - \frac{e(1 - e^2)^{1/2}}{\arcsin e} \right) - 1. \quad (7.3.24)$$

Устойчивость сфероидов Маклорена можно исследовать, вводя нормальные моды или используя метод тензорного вириала [116]. Наиболее интересное нарушение устойчивости возникает из-за двух нерадиальных «то-

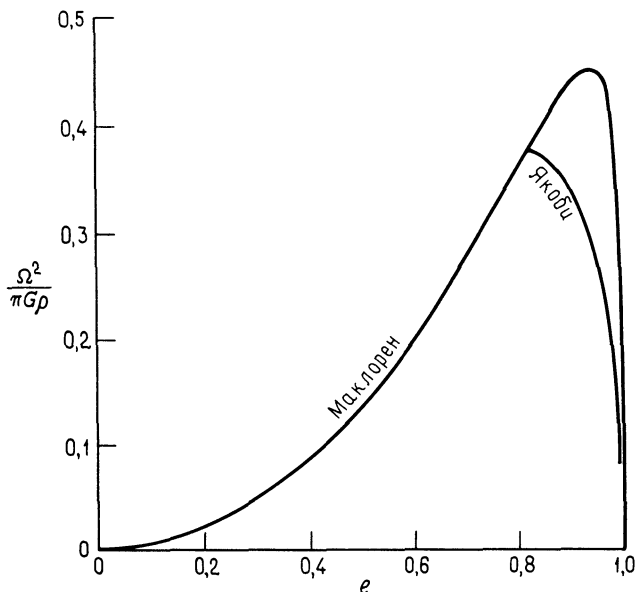


Рис. 7.2. Квадрат угловой скорости (в единицах $\pi G \rho$) для последовательностей сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби. По оси абсцисс отложен эксцентриситет, определенный по формуле (7.3.9). (По книге Чандрасекара [116].)

роидальных» мод, содержащих зависимость от азимутального угла, $\exp(\pm 2i\phi)$. Эта пара мод становится динамически неустойчивой ($\omega^2 < 0$) при $e > 0,952887$, что соответствует $T/|W| > 0,2738$. Вековая неустойчивость возникает на последовательности сфероидов Маклорена при меньших эксцентриситетах, $e = 0,812670$, $T/|W| = 0,1375$. Частота одной из мод обращается в нуль в этой точке, однако по обе стороны от нее ω^2 остается положительным. При $\omega^2 = 0$ наряду со сфероидом Маклорена существует и другая равновесная конфигурация. В действительности $T/|W| = 0,1375$ является точкой бифуркации, в которой от последовательности Маклорена ответвляется другая последовательность равновесных конфигураций. Эта новая последовательность состоит из эллипсоидов Якоби, вращающихся однородных тел с эллипсоидальной поверхностью. Угловые скорости и моменты количества движения сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби показаны на рис. 7.2 и 7.3.

При заданных моменте количества движения, массе и объеме эллипсоид Якоби имеет более низкую энергию, чем соответствующий сфероид Маклорена (рис. 7.4). Отсюда следует, что выше точки бифуркации сферонды Маклорена должны быть неустойчивыми и переходить в эллипсоиды Якоби. Однако в системе, описываемой динамическими уравнениями, энергия

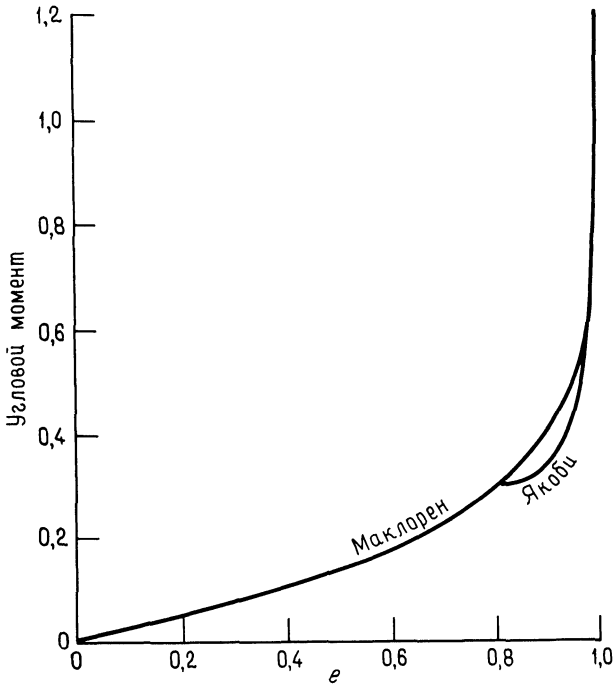


Рис. 7.3. Момент количества движения [в единицах $(GM^3\bar{a})^{1/2}$] для последовательностей сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби [параметр \bar{a} связан с тремя главными полуосями, $\bar{a} = (abc)^{1/3}$, причем для сфероида $a = b$]. В обоих случаях по оси абсцисс отложен эксцентриситет, определенный по формуле (7.3.9). (По книге Чандрасекара [116].)

сохраняется, если только в них не введены диссипативные члены. Неустойчивость, для развития которой необходима диссипация энергии, называется вековой в отличие от динамической неустойчивости. Добавление диссипативных членов в динамических уравнениях, описывающих развитие возмущений, приводит к тому, что при прохождении точки бифуркации ω приобретает мнимую часть, пропорциональную масштабу диссипации, т.е. коэффициенту вязкости. В противоположность этому время нарастания динамической неустойчивости целиком определяется динамикой, оно порядка $(G\rho)^{-1/2}$.

Поскольку на самом деле $\omega^2 = 0$ является кратным корнем при $T/|W| = 0,1375$, то в той же точке от последовательности Маклорена помимо эллипсоидов Якоби ответвляется еще одна последовательность равновесных конфигураций: *эллипсоиды Дедекинда*. Они имеют ту же форму, что и эллипсоиды Якоби, но их форма стационарна: эллиптическая поверхность поддерживается циркуляцией жидкости внутри тела.

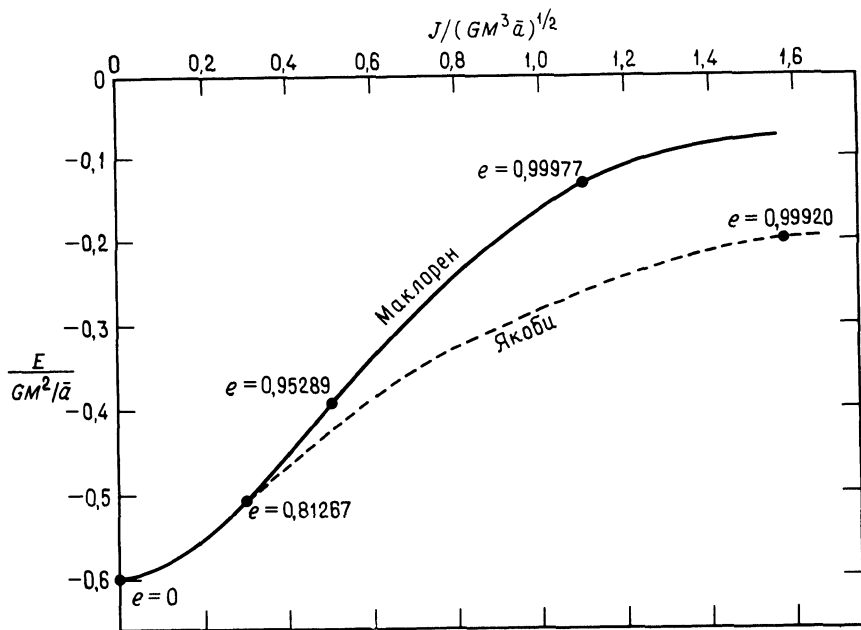


Рис. 7.4. Полная энергия $E = T + W$ как функция момента количества движения для сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби. Величина \bar{a} связана с тремя главными полуосями, $\bar{a} = (abc)^{1/3}$, причем для сфероида $a = b$. Для некоторых конфигураций указана величина эксцентриситета, определенного по формуле (7.3.9); показана точка бифуркации ($e = 0,81267$) и точка возникновения динамической неустойчивости ($e = 0,95289$).

Выше точки бифуркации сфероиды Маклорена обладают вековой неустойчивостью и по отношению к эллипсоидам Дедекинда. Однако благодаря вязкости дифференциальное вращение затухает, так что эллипсоиды Дедекинда при наличии вязкости не являются равновесными. Необходимая для перехода в другое состояние диссипация связана в этом случае с потерями энергии на гравитационное излучение (см. работу Чандра-секара [117]).

Если существенны и вязкость, и гравитационное излучение, то ситуация становится более сложной [160]. Мода Якоби, которая деформирует сфероид Маклорена, превращая его в эллипсоид Якоби, и которая неустойчива при наличии вязкости, стабилизируется гравитационным излучением. Мода Дедекинда, неустойчивость которой связана с гравитационным излучением, стабилизируется вязкостью. Можно так подобрать соотношение между вязкостью и гравитационным излучением, что все состояния на последовательности Маклорена будут устойчивыми вплоть до точки динамической неустойчивости. Возможно, что в астрофизических приложениях вязкость

недостаточно велика, чтобы быть существенной, но этот вопрос остается неясным.

Как будет показано в следующем разделе, сжимаемые конфигурации с твердотельным (однородным) вращением не представляют особого интереса. При рассмотрении объектов, плотность которых возрастает к центру, можно видеть, что допустимая скорость вращения, мерой которой является, например, отношение $T/|W|$, строго ограничена условием, чтобы в области вблизи экватора не происходило истечения вещества. При твердотельном вращении объекты, конденсированные к центру, начинают терять массу еще до того, как скорость их вращения достигает величины, при которой появляются «интересные» неустойчивости.

Однако при рассмотрении объектов, скорость вращения которых *неоднородна*, отношение $T/|W|$ в равновесном состоянии может существенно выходить за рамки, определяемые теоремой вириала, $0 \leq T/|W| \leq 1/2$ [см. формулу (7.1.21)]. При этом вновь возникает вопрос о неустойчивых конфигурациях, не обладающих осевой симметрией. Для грубой оценки мы примем следующие значения: $T/|W| \geq 0,14$ для вековой неустойчивости и $T/|W| \geq 0,26$ для динамической неустойчивости. Эти значения близки к полученным для сфероидов Маклорена, и, по-видимому, на них можно ориентироваться при самых различных распределениях момента количества движения и уравнениях состояния. Далее этот вопрос обсуждается в разд. 7.5.

7.4. ВРАЩАЮЩИЕСЯ БЕЛЫЕ КАРЛИКИ

Рассмотрим теперь конфигурации типа белых карликов, в которых нет магнитного поля, но есть вращение. Кинетическая энергия вращения — порядка

$$T \sim M\Omega^2 R^2 \sim \frac{J^2}{MR^2}, \quad (7.4.1)$$

где J — (сохраняющийся) момент количества движения. Уравнение вириала (7.1.21) для вращающихся звезд принимает теперь вид [ср. формулы (7.2.4) и (7.2.5)]

$$0 = -\alpha_{3/2} \frac{GM^2}{R} + \kappa_{3/2} \frac{J^2}{MR^2} + \beta_{3/2} \frac{M^{5/3}}{R^2} \quad (7.4.2)$$

для нерелятивистского вырождения и

$$0 = -\alpha_3 \frac{GM^2}{R} + \kappa_3 \frac{J^2}{MR^2} + \beta_3 \frac{M^{4/3}}{R} \quad (7.4.3)$$

для ультрарелятивистского вырождения. То обстоятельство, что энергия вращения в релятивистском пределе более круто зависит от радиуса, чем внутренняя энергия, весьма существенно. При любой массе всегда может быть