

недостаточно велика, чтобы быть существенной, но этот вопрос остается неясным.

Как будет показано в следующем разделе, сжимаемые конфигурации с твердотельным (однородным) вращением не представляют особого интереса. При рассмотрении объектов, плотность которых возрастает к центру, можно видеть, что допустимая скорость вращения, мерой которой является, например, отношение $T/|W|$, строго ограничена условием, чтобы в области вблизи экватора не происходило истечения вещества. При твердотельном вращении объекты, конденсированные к центру, начинают терять массу еще до того, как скорость их вращения достигает величины, при которой появляются «интересные» неустойчивости.

Однако при рассмотрении объектов, скорость вращения которых *неоднородна*, отношение $T/|W|$ в равновесном состоянии может существенно выходить за рамки, определяемые теоремой вириала, $0 \leq T/|W| \leq 1/2$ [см. формулу (7.1.21)]. При этом вновь возникает вопрос о неустойчивых конфигурациях, не обладающих осевой симметрией. Для грубой оценки мы примем следующие значения: $T/|W| \geq 0,14$ для вековой неустойчивости и $T/|W| \geq 0,26$ для динамической неустойчивости. Эти значения близки к полученным для сфероидов Маклорена, и, по-видимому, на них можно ориентироваться при самых различных распределениях момента количества движения и уравнениях состояния. Далее этот вопрос обсуждается в разд. 7.5.

7.4. ВРАЩАЮЩИЕСЯ БЕЛЫЕ КАРЛИКИ

Рассмотрим теперь конфигурации типа белых карликов, в которых нет магнитного поля, но есть вращение. Кинетическая энергия вращения — порядка

$$T \sim M\Omega^2 R^2 \sim \frac{J^2}{MR^2}, \quad (7.4.1)$$

где J — (сохраняющийся) момент количества движения. Уравнение вириала (7.1.21) для вращающихся звезд принимает теперь вид [ср. формулы (7.2.4) и (7.2.5)]

$$0 = -\alpha_{3/2} \frac{GM^2}{R} + \kappa_{3/2} \frac{J^2}{MR^2} + \beta_{3/2} \frac{M^{5/3}}{R^2} \quad (7.4.2)$$

для нерелятивистского вырождения и

$$0 = -\alpha_3 \frac{GM^2}{R} + \kappa_3 \frac{J^2}{MR^2} + \beta_3 \frac{M^{4/3}}{R} \quad (7.4.3)$$

для ультрарелятивистского вырождения. То обстоятельство, что энергия вращения в релятивистском пределе более круто зависит от радиуса, чем внутренняя энергия, весьма существенно. При любой массе всегда может быть

достигнуто равновесие, если *уменьшить* радиус тела. Таким образом, при любой массе можно построить равновесную модель, если момент количества движения отличен от нуля. Разумеется, такие модели могут оказаться нефизическими, например если приходится уменьшить радиус до таких размеров, что плотность возрастает до 10^{15} г/см³ и принятое нами уравнение состояния неприменимо. Кроме того, такие модели становятся неустойчивыми относительно обратного β -распада, слияния ядер, быстрой эволюции, обусловленной вязким переносом импульса, и других процессов.

Используя численный метод, Джеймс [298] построил модель *твердотельно вращающегося* белого карлика, в которой удовлетворяется уравнение состояния Чандрасекара. Для таких тел структура моделей в целом не очень отличается от случаев, когда вращение отсутствует. В частности, предельная масса может возрасти не более чем на 3,5% при заданном μ_e . Это вполне естественно, ибо, как будет показано ниже, для тел с повышением плотности к центру твердотельное вращение возможно лишь при условии $T/|W| < 0,007$, а при этом структура тела не претерпевает серьезных изменений по сравнению со случаем, когда вращения нет. Действительно, из формул (7.4.3) и (7.1.21) следует

$$0 = -\alpha_3 \frac{GM^2}{R} \left(1 - \frac{2T}{|W|}\right) + \beta_3 \frac{M^{4/3}}{R}. \quad (7.4.4)$$

Разрешая это уравнение относительно M , получаем

$$M = \left[\frac{\beta_3}{\alpha_3 G (1 - 2T/|W|)} \right]^{3/2} \approx M_0 \left(1 + \frac{3T}{|W|}\right) \approx 1,02 M_0, \quad (7.4.5)$$

где M_0 — предельная масса Чандрасекара при отсутствии вращения. Эта оценка в целом согласуется с результатами Джеймса.

Рассмотрим теперь вывод ограничения $0 \leq T/|W| \leq 0,00744$ для твердотельного вращения тела, состояние которого описывается политропой с $n=3$. Будем следовать книге Зельдовича и Новикова [636]. Заметим, что для политропы с $n=3$ плотность в центре в 54 раза превосходит среднюю плотность (упражнение 3.4), так что этот объект действительно сильно сжат к центру.

Рассмотрим прежде всего *сферическую* звезду, вращающуюся со скоростью, соответствующей отрыву вещества на экваторе,

$$v^2 = \Omega^2 R^2 = \frac{GM}{R}. \quad (7.4.6)$$

Для политропы с $n=3$ (см. формулу (3.2.11))

$$|W| = \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}. \quad (7.4.7)$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I \Omega^2, \quad (7.4.8)$$

где

$$I = \frac{2}{3} M \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \int_0^M r^2 dm = \frac{2}{3} \frac{MR^2}{\xi_1^4 |\theta'(\xi_1)|} \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi. \quad (7.4.9)$$

Значение этого интеграла равно 10,851, так что

$$\langle r^2 \rangle = 0,11303R^2. \quad (7.4.10)$$

Используя формулу (7.4.6) для Ω^2 , получим, что на пределе разрушения звезды

$$\frac{T}{|W|} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{3} M \langle r^2 \rangle \Omega^2}{\frac{3}{2} GM^2/R} = 0,025. \quad (7.4.11)$$

В противоположность этому для несжимаемой жидкости ($n \rightarrow 0$) имеем

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2, \quad |W| = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (7.4.12)$$

и, следовательно, на пределе разрушения звезды

$$\frac{T}{|W|} = \frac{1}{3}. \quad (7.4.13)$$

Сопоставление этих результатов демонстрирует роль повышения плотности в центре звезды как фактора, понижающего верхний предел скорости вращения для политропных конфигураций.

В этом выводе мы пренебрегли тем, что в действительности вращающиеся тела имеют *сфероидальную* форму, т.е. радиус на экваторе превосходит среднее значение, $R_1 > R$. Приближенный анализ равновесной формы можно провести на основе модели Роша. В этой модели предполагается, что распределение массы *в основном* не меняется при вращении; это разумное приближение, так как плотность к центру звезды повышается. Поэтому в наружных слоях гравитационный потенциал имеет обычный вид, $\Phi = -GM/r$. При постоянной угловой скорости вращения вокруг оси z можно ввести центробежный потенциал:

$$\Phi_c = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (7.4.14)$$

При этом

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \Phi_c \quad (7.4.15)$$

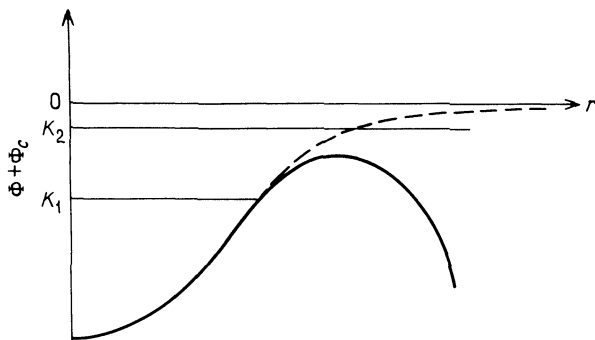


Рис. 7.5. Форма потенциала $\Phi + \Phi_c$ вдоль радиального направления в экваториальной плоскости (сплошная линия) и вдоль полярной оси z (штриховая линия). Горизонтальные прямые K_1 и K_2 соответствуют различным значениям константы K в формуле (7.4.17) (Зельдович и Новиков [636].)

[см. формулу (7.3.13)], и уравнение гидростатического равновесия (7.3.10) принимает вид

$$0 = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(\Phi + \Phi_c), \quad (7.4.16)$$

или

$$h + \Phi + \Phi_c = K, \quad (7.4.17)$$

где K — константа, а

$$h = \int \frac{dP}{\rho} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (7.4.18)$$

— удельная энтальпия. Будем предполагать, что константа K в формуле (7.4.17) та же, что и в отсутствие вращения. Поскольку $h(R) = 0$, то

$$K = -\frac{GM}{R}. \quad (7.4.19)$$

Эффективный потенциал, $\Phi_{\text{eff}} = \Phi + \Phi_c$, показан на рис. 7.5. В плоскости экватора Φ_{eff} имеет максимум при значении радиуса $r_c = (GM/\Omega^2)^{1/3}$, причем максимальное значение $\Phi_{\text{max}} = -\frac{1}{2}GM/r_c$.

Уравнение (7.4.17) имеет разумное решение лишь при условии, что h обращается в нуль на некотором расстоянии от центра, $r = R_1$, т.е. на поверхности тела. Поскольку $h(r)$ — расстояние от точки на кривой $\Phi_{\text{eff}}(r)$ до линии $\Phi_{\text{eff}} = K$ (см. рис. 7.5), то мы видим, что K должно быть меньше, чем Φ_{max} . Если $K = \Phi_{\text{max}}$, то R_1 принимает максимальное значение, равное

$r_c = \frac{1}{2}R$. Таким образом, твердотельно вращающаяся звезда растягивается в плоскости экватора максимум в полтора раза. Соответствующее максимальное значение угловой скорости равно

$$\Omega = \left(\frac{GM}{r_c^3} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \quad (7.4.20)$$

и отличается множителем $(\frac{2}{3})^{3/2} = 0,544$ от максимального значения для сферического случая [см. (7.4.6)]. Отсюда следует

$$(T/|W|)_{\max} = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \times (\text{значение для сферы}) = 0,00744. \quad (7.4.21)$$

Ситуация здесь существенно отличается от случая сфероидов Маклорена, которые существуют (хотя и теряя устойчивость) вплоть до $T/|W| \approx 0,5$.

Джеймс [298] показал, что для политропы с индексом $n > 0,808$ истечение вещества с экватора для твердотельно вращающихся звезд начинается ниже точки бифуркации. Однако этот предел на скорость вращения едва ли имеет физический смысл. По-видимому, реальные звезды вращаются не как твердое тело, по крайней мере в своих наружных слоях, так что приведенный выше анализ просто показывает, что твердотельно вращающиеся конфигурации не подходят в качестве моделей для быстро вращающихся звезд.

При потере момента количества движения звезды сжимаются, и отношение $T/|W|$ должно расти как $1/R$, поэтому вращение, вероятно, более существенно для компактных объектов, чем для звезд главной последовательности, от которых они происходят. Детальные модели дифференциально вращающихся белых карликов были построены Остройкером и Боденхеймером [430] для звезд с массами в интервале от 0,5 до 4,1 M_{\odot} . (Модели с $T/|W| \leq 0,41$ соответствуют массам $M \leq 2,4 M_{\odot}$.) Каждая модель определяется средним молекулярным весом $\mu_e (= 2)$, полной массой M , полным моментом количества движения J и удельным распределением момента $j(m)$.

Для рассмотренных моделей разность угловых скоростей разных слоев не очень велика, во всех случаях Ω (на экваторе)/ Ω (в центре) $\geq 0,2$. Радиусы равновесных конфигураций равны 10^9 см, с точностью до множителя порядка 2, так что в этом рассмотренные модели не отличаются существенно от моделей невращающихся звезд с массами в интервале (0,4—0,9) M_{\odot} . Поскольку плотность в центре намного меньше 10^9 г/см³, вещество устойчиво относительно обратного β -распада, и принятое нами уравнение состояния Чандрасекара остается справедливым. Для моделей с массами, превышающими 1,4 M_{\odot} , поверхностные скорости лежат в интервале 3000—7000 км/с. Линии водорода, наблюдаемые в спектрах большинства белых карликов, имеют узкие ядра, поэтому подобные быстро вращающиеся объекты должны быть весьма редкими.

По-видимому, звезды такого типа (если только они вообще существуют) обладают высокой светимостью. Дюрисен [171] показал, что диссипа-

ция энергии, связанная с вязкостью (характерное время свыше 10^9 лет), в массивных моделях приводит к высоким внутренним температурам и светимостям, превышающим $10^{-1} L_{\odot}$. Хотя в спектрах белых карликов типа DC нет отдельных линий (см. приложение А) и потому они могли бы быть быстро вращающимися, их светимости лежат существенно ниже этого значения.

Быстро вращающиеся белые карлики устойчивы относительно схлопывания, вызванного обратным β -распадом, если $\rho_c \leq 3 \cdot 10^9$ г/см³ (точное значение пороговой плотности зависит от состава звезды; см. табл. 3.1). Будем считать, что они не имеют вековой неустойчивости при $T/|W| \leq 0,14$ и динамически устойчивы при $T/|W| \leq 0,26$ (см. разд. 7.5). Найдем теперь примерный предел для массы таких звезд.

Вновь воспользуемся вариационным принципом для энергии, который обобщает выражение (6.10.23) с учетом вращения (см. книгу Зельдовича и Новикова [636]). Сделаем два упрощающих предположения: а) на подобных сфероидальных поверхностях плотности постоянны, б) вращение преобразует сферическую поверхность постоянной плотности в сфероидальную поверхность, ограничивающую такой же объем. Строго говоря, второе предположение справедливо лишь для несжимаемой жидкости, однако оно неплохо выполняется в центральных областях сжимаемой звезды, где сосредоточена большая часть ее массы. Если уравнение состояния имеет вид $P=P(\rho)$, то предположение (а) также выполняется лишь для несжимаемой жидкости (см. разд. 4.4 в книге Тассуля [559]). И снова это предположение приводит, как мы увидим ниже, к разумной числовой оценке, если большая часть массы звезды заключена в ее ядре.

Из указанных предположений следует, что плотность как функция массы, заключенной внутри данного слоя сфероидальной звезды, совпадает с плотностью для сферической звезды, имеющей ту же плотность в центре. Поэтому, как и в формуле (6.10.9), имеем

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \int u \, dm \\ &= k_1 K \rho_c^{1/3} M. \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

Гравитационная потенциальная энергия для шара с постоянной плотностью (политропа с $n=0$) равна

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{5/3} \rho^{1/3}. \quad (7.4.23)$$

Соответствующее выражение для сфероида постоянной плотности (7.3.23) имеет вид

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a} \frac{\arcsin e}{e} = -\frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM^{5/3} \rho^{1/3} \frac{\arcsin e}{e} (1 - e^2)^{1/6}. \quad (7.4.24)$$

Для сферического тела в состоянии политропы с $n=3$ формула (6.10.10) дает

$$W = -k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3}. \quad (7.4.25)$$

Покажем теперь, что для политропы с $n=3$ при наших предположениях вращение модифицирует W так же, как и для однородной звезды:

$$W = -k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3} \frac{\arcsin e}{e} (1 - e^2)^{1/6}. \quad (7.4.26)$$

Этот результат следует из теоремы Ньютона, согласно которой потенциал внутри эллипсоидальной оболочки с постоянной плотностью постоянен. [Это можно показать¹⁾, вычитая друг из друга два выражения вида (7.3.1).]

Будем строить сфероидальную звезду, начиная с внешнего сфероидального слоя с постоянной плотностью. Внутри этого слоя поместим следующий, с постоянной, но несколько более высокой плотностью, и т.д. Каждый слой помещается в полость, в которой потенциал постоянен. Полная потенциальная энергия будет меньше, чем потенциальная энергия сферической звезды, во столько же раз, во сколько потенциал внутри сфероидальной полости меньше потенциала в сферической полости того объема и с той же внешней массой. Их отношение определяется множителем

$$\frac{\arcsin e}{e} (1 - e^2)^{1/6}. \quad (7.4.27)$$

Отсюда следует формула (7.4.26). Удобно ввести параметр, характеризующий сплюснутость:

$$\lambda \equiv \left(\frac{c^2}{a^2} \right)^{1/3} = (1 - e^2)^{1/3} \quad (7.4.28)$$

и обозначить выражение в (7.4.27)

$$g(\lambda) \equiv \lambda^{1/2} (1 - \lambda^3)^{-1/2} \arccos(\lambda^{3/2}). \quad (7.4.29)$$

При этом

$$W = -k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3} g(\lambda). \quad (7.4.30)$$

Вычислим теперь энергию вращательного движения:

$$T = \frac{J^2}{2I}. \quad (7.4.31)$$

¹⁾ Простое геометрическое доказательство приводится в разд. 17 книги Чандрасекара [116].

Для сфероида $I \propto Ma^2$ отношение моментов инерции сфероида и сферы одного и того же объема равно

$$\frac{I}{I_{\text{sphere}}} = \frac{a^2}{(a^2 c)^{2/3}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (7.4.32)$$

Из формул (7.4.9) и (7.4.31) получаем

$$T = k_5 \lambda J^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3}, \quad (7.4.33)$$

где

$$k_5 = \frac{3(4\pi)^{2/3} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|^{5/3}}{4 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi} = 1,2042. \quad (7.4.34)$$

Таким образом,

$$E = k_1 K M \rho_c^{1/3} - k_2 G M^{5/3} \rho_c^{1/3} g(\lambda) + k_5 \lambda J^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3}. \quad (7.4.35)$$

Членами ΔE_{int} и ΔE_{GTR} можно пренебречь, так как они малы и играют роль только при исследовании радиальной устойчивости.

Равновесие определяется условием $\partial E / \partial \rho_c = 0 = \partial E / \partial \lambda$ при фиксированных M и J . Из условия $\partial E / \partial \lambda = 0$ следует

$$g'(\lambda) = \frac{k_5 J^2 \rho_c^{1/3}}{k_2 G M^{10/3}} = \frac{T}{|W|} \frac{g(\lambda)}{\lambda}. \quad (7.4.36)$$

Используя формулу (7.4.29), получаем

$$\frac{T}{|W|} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3\lambda^3}{1 - \lambda^3} - \frac{3\lambda^{3/2}}{(1 - \lambda^3)^{1/2} \arccos \lambda^{3/2}} \right]. \quad (7.4.37)$$

Эта формула аналогична соотношению (7.3.24) между эксцентриситетом e и отношением $T/|W|$ для сфероида Маклорена.

Из условия $\partial E / \partial \rho_c = 0$ следует

$$\frac{1}{3} k_1 K M \rho_c^{-2/3} - \frac{1}{3} k_2 G M^{5/3} g(\lambda) \rho_c^{-2/3} + \frac{2}{3} k_5 \lambda J^2 M^{-5/3} \rho_c^{-1/3} = 0, \quad (7.4.38)$$

т.е.

$$\frac{1}{3} k_1 K M \rho_c^{-2/3} - \frac{1}{3} k_2 G M^{5/3} g(\lambda) \rho_c^{-2/3} \left(1 - \frac{2T}{|W|} \right) = 0. \quad (7.4.39)$$

Следовательно,

$$M = \left(\frac{k_1 K}{k_2 G g(\lambda)(1 - 2T/|W|)} \right)^{3/2} = \frac{M_0}{[g(\lambda)(1 - 2T/|W|)]^{3/2}}, \quad (7.4.40)$$

где $M_0 = M_{Ch} = 1,457(2/\mu_e)^2 M_\odot$.

Максимальная равновесная масса для вращающейся конфигурации, не подверженной вековой неустойчивости, получается, если подставить в формулы (7.4.37) и (7.4.40) значение $T/|W| \approx 0,14$. В результате

$$\lambda = 0,693, \quad g(\lambda) = 0,974,$$

$$M = 1,70 M_0 = 2,5 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot. \quad (7.4.41)$$

Эта величина в точности совпадает со значением, полученным в работах Дюрисена [172] и Дюрисена и Имамуры [173] путем детальных вычислений для предельной массы, не подверженной вековой неустойчивости. Столь хорошее согласие, скорее всего, связано с тем, что в моделях Дюрисена дифференциальное вращение выражено не очень сильно.

Масса, соответствующая пределу динамической устойчивости, находится подстановкой в формулы (7.4.37) и (7.4.40) отношения $T/|W| \approx 0,26$. В результате получаем

$$\lambda = 0,475, \quad g(\lambda) = 0,902,$$

$$M = 3,51 M_0 = 5,1 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot \quad (7.4.42)$$

в разумном согласии с полученным Дюрисеном значением $M = 4,6 M_\odot$.

При $T/|W| \geq 0,14$ диссипация происходит путем гравитационного излучения. В этом случае характерные времена порядка $10^3 - 10^7$ лет [208]; см. упражнение 17.7), в то время как характерные времена для вязкой диссипации порядка 10^9 лет [117, 172].

Согласно данным Гринстейна и др. [245], белые карлики типа DA вращаются медленно (линейная скорость вращения не превосходит 40 км/с, а возможно, даже ниже 10—20 км/с), а быстро вращающиеся массивные белые карлики не наблюдаются. Очевидно, что момент количества движения теряется звездой-предшественником, находящейся в стадии красного гиганта, еще до образования белого карлика.

Упражнение 7.2. Решить задачу, предложенную в упражнении 6.21, добавив вращательные члены, как в формуле (7.4.35). Показать, что критическое значение $\Gamma - 4/3$ понижается на величину $2(\frac{1}{2} - \Gamma)T/|W|$. Отсюда следует, что вращение стремится стабилизировать радиальные моды.

Упражнение 7.3. а) Распределение плотности внутри Солнца приблизительно соответствует политропе с $n = 3$. Найти момент инерции Солнца. (Расчеты по детальной модели Солнца дают $5,7 \cdot 10^{53} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.)

б) Угловая скорость вращения поверхности Солнца равна $2,9 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. Считая, что Солнце вращается как твердое тело, найти его момент количества движения.

в) Чему равно отношение $T/|W|$ для Солнца?

г) Предположим, что Солнце внезапно сжимается и становится белым карликом, причем J и M не меняются. Чему в этом случае будет равно отношение $T/|W|$?

д) Согласно Аллену [8], типичная звезда спектрального типа B5, принадлежащая главной последовательности, имеет массу $M \sim 6M_{\odot}$, радиус $R \sim 3,8R_{\odot}$ и угловую скорость на поверхности $\sim 9 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Полагая снова $n = 3$ в политропном распределении плотности, повторить выкладки пп. (а)—(г). Показать с учетом указанных предположений, что такая звезда должна при переходе в состояние белого карлика потерять как массу, так и момент количества движения.

7.5. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗД

В данной книге мы не сможем подробно обсудить этот, в сущности, технический вопрос. Мы приведем лишь сводку результатов, уделяя основное внимание вековой неустойчивости, играющей наиболее важную роль для компактных объектов.

Важным первым шагом к выработке критерия вековой устойчивости для сжимаемых вращающихся звезд был вариационный принцип Линден-Белла и Острайкера [376]. Малые возмущения в звезде описывались вектором лагранжева смещения ξ (см. разд. 6.2). Предполагалось, что конфигурация звезды обладает вековой устойчивостью в том и только в том случае, когда некоторый оператор C (аналогичный оператору V_2 в разд. 6.7) положительно определен. Считалось, что это условие эквивалентно положительности полной энергии возмущения для всех начальных данных.

Позднее, в период с 1968 по 1973 г., для исследования устойчивости звезд с дифференциальным вращением использовался метод тензорного вириала [431, 434, 560]. В этом методе рассматриваются моменты уравнений, по которым развиваются возмущения. Вычисление второго момента эквивалентно вычислению оператора C для пробного смещения ξ , линейного по координатам. В случае сфероидов Маклорена метод тензорного вириала дает точное решение проблемы устойчивости, так как неустойчивая собственная функция в этом случае действительно линейно зависит от координат. Согласно этому методу, для сжимаемых звезд вековая неустойчивость также возникает при $T/|W| \approx 0,14$ в широком диапазоне распределений момента количества движения и уравнений состояния. Нечувствительность критического значения $T/|W|$ к этим условиям — результат, весьма примечательный.

Поскольку метод тензорного вириала эквивалентен выбору определенной пробной функции в вариационном принципе Линден-Белла—Острайкера, то, казалось бы, его можно рассматривать как достаточное условие неустойчивости. К сожалению, это было бы неправильно: причина в том, что