Упражнение 7.3. а) Распределение плотности внутри Солнца приблизительно соответствует политропе с $n = 3$. Найти момент инерции Солнца. (Расчеты по детальной модели Солнца дают $5{,}7 \cdot 10^{53}$ г$\cdot$см^2.)

б) Угловая скорость вращения поверхности Солнца равна $2{,}9 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$. Считая, что Солнце вращается как твердое тело, найти его момент количества движения.

в) Чему равно отношение $T/|W|$ для Солнца?

г) Предположим, что Солнце внезапно сжимается и становится белым карликом, причем J и M не меняются. Чему в этом случае будет равно отношение $T/|W|$?

д) Согласно Аллену [8], типичная звезда спектрального типа B5, принадлежащая главной последовательности. имеет массу $M \sim 6M_\odot$, радиус $R \sim 3{,}8R_\odot$ и угловую скорость на поверхности $\sim 9 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. Полагая снова $n = 3$ в политропном распределении плотности, повторить выкладки пп. (а)—(г). Показать с учетом указанных предположений, что такая звезда должна при переходе в состояние белого карлика потерять как массу, так и момент количества движения.

7.5. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗД

В данной книге мы не сможем подробно обсудить этот, в сущности, технический вопрос. Мы приведем лишь сводку результатов, уделяя основное внимание вековой неустойчивости, играющей наиболее важную роль для компактных объектов.

Важным первым шагом к выработке критерия вековой устойчивости для сжимаемых вращающихся звезд был вариационный принцип Линден-Белла и Острайкера [376]. Малые возмущения в звезде описывались вектором лагранжева смещения ξ (см. разд. 6.2). Предполагалось, что конфигурация звезды обладает вековой устойчивостью в том и только в том случае, когда некоторый оператор C (аналогичный оператору V_2 в разд. 6.7) положительно определен. Считалось, что это условие эквивалентно положительности полной энергии возмущения для всех начальных данных.

Позднее, в период с 1968 по 1973 г., для исследования устойчивости звезд с дифференциальным вращением использовался метод тензорного вириала [431, 434, 560]. В этом методе рассматриваются моменты уравнений, по которым развиваются возмущения. Вычисление второго момента эквивалентно вычислению оператора C для пробного смещения ξ, линейного по координатам. В случае сфероидов Маклорена метод тензорного вириала дает точное решение проблемы устойчивости, так как неустойчивая собственная функция в этом случае действительно линейно зависит от координат. Согласно этому методу, для сжимаемых звезд вековая неустойчивость также возникает при $T/|W| \approx 0{,}14$ в широком диапазоне распределений момента количества движения и уравнений состояния. Нечувствительность критического значения $T/|W|$ к этим условиям — результат, весьма примечательный.

Поскольку метод тензорного вириала эквивалентен выбору определенной пробной функции в вариационном принципе Линден-Белла—Острайкера, то, казалось бы, его можно рассматривать как достаточное условие неустойчивости. К сожалению, это было бы неправильно: причина в том, что критерий Линден-Белла—Острайкера в его первоначальной формулировке не вполне верен [46, 209, 210, 289]. Существуют «тривиальные» лагранжевы смещения ξ, не меняющие физической конфигурации звезды. Такие смещения соответствуют переобозначению частиц, в то время как физические эйлеровы возмущения $\delta\rho$, δs и $\delta\mathbf{v}$ остаются равными нулю. Можно выбрать такие «тривиальные» ξ, при которых оператор C принимает отрицательные значения; разумеется, это не имеет никакого отношения к неустойчивости.

Исправленный критерий устойчивости был сформулирован в работе Бардина и др. [46] (см. также [209, 210]). Следует ограничиться смещениями ξ, которые «ортогональны» тривиальным смещениям в некотором математически точном смысле, и рассматривать действие оператора C только на такие «разрешенные» смещения. Вообще, значение оператора C оказалось равным не полной энергии возмущения, а «канонической» энергии E_c, т.е. величине гамильтониана возмущения. Если тривиальные смещения не исключены, то каноническая энергия не равна полной.

Другая проблема, связанная с критерием Линден-Белла—Острайкера, состояла в том, что диссипативный механизм не был четко отождествлен. В случае сфероидов Маклорена вековые неустойчивости относительно вязких и радиационных потерь возникают одновременно. Это совпадение оказалось случайным: его нет в аналогичных моделях сжимаемых звезд. Вообще говоря, природу диссипации можно установить прямо в ходе анализа устойчивости (ссылки на соответствующую работу Джинса и Литлтона можно найти в цитированных статьях [46, 208, 209, 289]). Условие положительной определенности E_c для всех нетривиальных смещений обеспечивает устойчивость относительно гравитационного излучения, но не относительно вязкой диссипации. Тензорная вириальная пробная функция не ортогональна тривиальным смещениям и потому не позволяет проанализировать этот случай.

По-видимому, невозможно строго сформулировать критерий вязкой неустойчивости для звезд с дифференциальным вращением, поскольку такая звезда находится в неравновесном состоянии. Время нарастания внесенного возмущения должно быть того же порядка, что и время установления для невозмущенной звезды при наличии вязкости. (Вероятно, это не относится к аккреционным дискам, имеющим малые радиальные скорости, однако этот вопрос строго не рассматривался.)

Критерий устойчивости относительно вязкости для твердотельно вращающихся звезд формулируется следующим образом. Каноническая энергия во вращающейся системе координат, $E_{c,r}$, должна быть положительно определенной. (В этом случае тривиальные смещения несущественны.) Метод тензорного вириала эквивалентен некоторому утверждению относительно E_c и потому также неприменим в общем случае.

Фридман и Шутц [210] сделали примечательное открытие: все вращающиеся звезды обладают вековой неустойчивостью относительно гравитационного излучения. Однако для медленно вращающихся звезд неустойчивость возникает лишь в моде с очень высоким номером m, в которой азимутальная зависимость ξ определяется множителем $\exp(im\phi)$. При этом время нарастания неустойчивости намного больше возраста Вселенной. Неустойчивость, существенная с физической точки зрения, развивается в моде с $m=2$.

Дюрисен и Имамура [173] рассмотрели возникновение неустойчивости в моде с $m=2$ для вращающихся белых карликов и вращающихся политропных конфигураций, используя пробную функцию, ортогональную к тривиальным смещениям. Было обнаружено, что неустойчивость относительно гравитационного излучения по-прежнему появляется при $T/|W|\approx 0{,}14$. Найденные ими значения всего лишь на 1—7% превосходят оценки, полученные методом тензорного вириала. Была показана возможность существования устойчивых быстро вращающихся белых карликов с массами вплоть до 2,5 $M_{\odot}$.

Отметим в заключение, что при грубых оценках величину $T/|\mathrm{W}|\approx 0{,}14$ можно использовать в качестве критерия возникновения вековой неустойчивости для широкого многообразия распределений углового момента и уравнений состояния.