8.2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ БЕЙМА — БЕТЕ — ПЕТИКА

При плотностях от ρ_{drip} до ρ_{nuc} вещество состоит из ядер, электронов и свободных нейтронов. По мере приближения к ρ_{nuc} ядер становится все меньше, так как энергия связи падает с увеличением плотности. Это отчасти можно понять, поскольку действующий между нетождественными нуклонами «тензорный» потенциал, который дает сильное притяжение в состоянии $^3S_1$ и играет важную роль в существовании дейтрона (см. разд. 8.3), не действует между нейтронами из-за принципа Паули. В сущности, система, состоящая из одних нейтронов, не становится связанной ни при каких плотностях. Поскольку по мере возрастания плотности содержание нейтронов в ядрах повышается, их стабильность падает, пока нейтронное число не достигает критического значения, при котором ядра разрушаются, сливаясь воедино.

Мы уделим основное внимание уравнению состояния Бейма, Бете и Петика [55] (ВВР) в указанном диапазоне значений плотности, а в конце данного раздела наметим некоторые другие возможные подходы. Этот метод является существенным улучшением подходов, основанных лишь на полуэмпирических массовых формулах, таких, как метод Гаррисона — Уилера (см. разд. 2.6). Массовая формула используется и при выводе уравнения ВВР, но в нее включаются и результаты, полученные путем детальных многочастичных расчетов.

Во-первых, поскольку присутствующие в звезде ядра содержат большое число нейтронов, ядерное вещество по своим свойствам очень похоже на газ свободных нейтронов, окружающий ядра. Однако в первоначальных работах на эту тему использовались полуэмпирические массовые формулы, в которых энергия связи нуклонов в ядре вычислялась по формулам, относящимся к ядерному веществу, т.е. к «обычным» ядрам с $Z/A \simeq 0{,}5$, в то время как энергия нейтронного газа находилась с помощью вычислений, основанных на нейтрон-нейтронном взаимодействии. Не удивительно, что в предельном случае, когда вещество представляет собой нейтронный газ с примесью протонов, указанные подходы приводили к разным результатам.

Во-вторых, раньше предполагалось, что поверхностная энергия ядра определена для ядер, помещенных в пустоту. Однако наличие извне нейтронного газа заметно понижает поверхностную энергию. Этого и следует ожидать: если состав вещества внутри и вне ядра становится одинаковым, поверхностная энергия должна исчезать.

В-третьих, уравнение ВВР более аккуратно учитывает эффект кулоновской энергии ядерной решетки.

Подход ВВР [55] основан на модели ядра в виде «сжимаемой жидкой капли». Полная плотность энергии записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon(A, Z, n_N, n_n, V_N) \\
&= n_N(W_N + W_L) + \varepsilon_n(n_n)(1 - V_N n_N) + \varepsilon_e(n_e). \qquad (8.2.1)
\end{aligned}
$$

Здесь n_N — концентрация ядер, n_n — концентрация нейтронов вне ядер («нейтронный газ»). Новым моментом является зависимость от объема ядра V_N. Величина V_N уменьшается при повышении внешнего давления и потому должна рассматриваться как переменная. Величина W_N — это энергия ядра, включающая его массу покоя; она зависит от A, Z, n_n и V_N. Энергия решетки обозначается W_L; ε_n и ε_e — плотности энергии нейтронного газа и электронного газа соответственно. Отметим, что $V_N n_N$ — доля полного объема, занятая ядрами, а $1 - V_N n_N$ — доля объема, занятая нейтронным газом. Условие нейтральности вещества в этих обозначениях имеет вид

$$n_e = Z n_N, \tag{8.2.2}$$

а концентрация барионов

$$n = A n_N + (1 - V_N n_N) n_n. \tag{8.2.3}$$

Заметим, что величина n_n определяется через число свободных нейтронов N_n в объеме V_n, не занятом ядрами,

$$n_n = \frac{N_n}{V_n} = \frac{N_n}{V(1 - V_N n_N)}, \tag{8.2.4}$$

где V — объем, содержащий N_n нейтронов и $n_N V$ ядер.

Равновесие определяется условием минимума ε при фиксированном n. Поскольку ε зависит от пяти переменных, это приводит к четырем независимым условиям.

Первое условие возникает при рассмотрении единичного объема, содержащего фиксированное число протонов $n_N Z$, фиксированное число нейтронов в ядрах $n_N(A-Z)$, фиксированное число нейтронов вне ядер $n_n(1 - V_N n_N)$, причем доля объема, занятая ядрами, $n_N V_N$, также фиксирована. Каково оптимальное число A для этих ядер? Оно определяется минимизацией ε как функции A при фиксированных $n_N Z$, $n_N A$, $n_N V_N$ и n_n. Отсюда следует, что ε_n фиксировано, как и ε_e (так как n_e фиксировано). Введем обозначение

$$x \equiv \frac{Z}{A}. \tag{8.2.5}$$

Тогда, поскольку при этой вариации $n_N = \mathrm{const}/A$, формула (8.2.1) дает

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{W_N + W_L}{A}\right)_{x,\, n_N A,\, n_N V_N,\, n_n} = 0. \tag{8.2.6}$$

С физической точки зрения это означает, что энергия на нуклон внутри ядра должна быть минимальна.

Второе условие состоит в том, что ядра должны быть устойчивы относительно β-распада, т.е. изменения Z. Иными словами, энергия ε должна иметь минимум по Z при фиксированных A, n_N, V_N и n_n. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial Z}\varepsilon_e(n_e) = \frac{d\varepsilon_e}{dn_e}\frac{\partial n_e}{\partial Z} = \mu_e n_N, \tag{8.2.7}$$

согласно формулам (2.6.8) и (8.2.2), где μ_e — химический потенциал электрона. Таким образом, из (8.2.1) следует

$$\mu_e = -\frac{\partial}{\partial Z}(W_N + W_L)_{A,n_N,V_N,n_n}. \tag{8.2.8}$$

Эту формулу можно следующим образом переписать через химические потенциалы ядер. Химический потенциал нейтронов в ядрах $\mu_n^{(N)}$ — это минимальная энергия, необходимая, чтобы добавить нейтрон к ядру, т.е.

$$\mu_n^{(N)} = \frac{\partial}{\partial A}(W_N + W_L)_{Z,n_N,V_N,n_n}. \tag{8.2.9}$$

Аналогично химический потенциал протонов вычисляется при фиксированном числе нейтронов $A-Z$:

$$\mu_p^{(N)} = \frac{\partial}{\partial Z}(W_N + W_L)_{A-Z,n_N,V_N,n_n}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Z}(W_N + W_L)_{A,n_N,V_N,n_n} + \frac{\partial}{\partial A}(W_N + W_L)_{Z,n_N,V_N,n_n}, \tag{8.2.10}$$

поскольку $\partial A/\partial Z = 1$[1]. Таким образом, условие стабильности относительно β-распада (8.2.8) можно записать в привычной форме:

$$\mu_e = \mu_n^{(N)} - \mu_p^{(N)}. \tag{8.2.11}$$

Согласно третьему условию, газ свободных нейтронов должен быть в равновесии с нейтронами в ядрах. Иными словами, можно перенести нейтрон из газа в ядро без затраты энергии. Таким образом, ε имеет минимум как функция A при фиксированных Z, n_N, V_N, n. Дифференцируя формулу (8.2.3) по A при этих условиях, получаем

$$\frac{\partial n_n}{\partial A} = -\frac{n_N}{1 - V_N n_N}. \tag{8.2.12}$$

При дифференцировании суммы $W_N + W_L$ в формуле (8.2.1) можно использовать равенство

$$\left.\frac{\partial}{\partial A}\right|_{Z,n_N,V_N,n} = \left.\frac{\partial}{\partial A}\right|_{Z,n_N,V_N,n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial A}\left.\frac{\partial}{\partial n_n}\right|_{Z,n_N,V_N,A}, \tag{8.2.13}$$

[1] Отметим, что у нас все химические потенциалы включают массы покоя. В работе Бейма, Бете и Петика массы покоя нуклонов вычитаются из соответствующих выражений.

так как W_L не зависит от n_n, то с учетом (8.2.9) получаем

$$n_N\mu_n^{(N)} - \frac{n_N}{1 - V_N n_N}\left[n_N \left.\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right|_{Z, A, n_N, V_N} + (1 - V_N n_N)\frac{d\varepsilon_n}{dn_n}\right] = 0 \quad (8.2.14)$$

или

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n^{(G)}, \quad (8.2.15)$$

где, по определению, химический потенциал свободных нейтронов равен

$$\mu_n^{(G)} \equiv \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left.\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right|_{Z, A, n_N, V_N} + \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}. \quad (8.2.16)$$

Член $d\varepsilon_n/dn_n$, как обычно, соответствует изменению объемной энергии нейтронного газа. Первый член в формуле (8.2.16) соответствует изменению поверхностной энергии ядер, связанному с добавлением в газ одного нейтрона. Действительно, энергия ядер на единицу объема, занятого нейтронным газом, равна [см. формулу (8.2.4)]

$$\frac{(n_N V) W_N}{V_n} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} W_N. \quad (8.2.17)$$

Производная этого выражения входит в (8.2.16).

Четвертое условие равновесия состоит в том, что давление нейтронного газа должно быть равно давлению ядер:

$$P^{(G)} = P^{(N)}. \quad (8.2.18)$$

Это условие следует из минимизации ε как функции V_N при фиксированных Z, A, n_N и $N_n/V = n_n(1 - V_N n_N)$. Поскольку $n_n = \mathrm{const}/(1 - V_N n_N)$, то

$$\frac{\partial n_n}{\partial V_N} = \frac{n_n n_N}{1 - V_N n_N}. \quad (8.2.19)$$

Используем равенство

$$\left.\frac{\partial}{\partial V_N}\right|_{Z, A, n_N, n_n(1 - V_N n_N)} = \left.\frac{\partial}{\partial V_N}\right|_{Z, A, n_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N}\left.\frac{\partial}{\partial n_n}\right|_{Z, A, n_N, V_N} \quad (8.2.20)$$

Подставляя в (8.2.1) $1 - V_N n_N = n_n(1 - V_N n_N)/n_n$ и дифференцируя, получаем

$$0 = n_N \frac{\partial}{\partial V_N}(W_N + W_L)_{Z, A, n_N, n_n} + n_N \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left.\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right|_{Z, A, n_N, V_N} +$$

$$+ n_n(1 - V_N n_N)\frac{\partial n_n}{\partial V_N}\frac{\partial}{\partial n_n}\left(\frac{\varepsilon_n}{n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N}. \quad (8.2.21)$$

Очевидно,

$$P^{(N)} = -\frac{\partial}{\partial V_N}(W_N + W_L)_{Z,A,n_N,n_n}. \tag{8.2.22}$$

С учетом формул (8.2.16) и (8.2.19) из (8.2.21) следует (8.2.18), где

$$P^{(G)} = n_n\mu_n^{(G)} - \varepsilon_n. \tag{8.2.23}$$

Заметим, что определение давления в этой формуле следует из (2.1.21) (см. также упражнение 2.4).

Упражнение 8.1. Показать, что полное давление равно

$$P \equiv n^2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = P^{(G)} + P_e + P_L, \tag{8.2.24}$$

где

$$P_e = n_e^2\frac{\partial}{\partial n_e}\left(\frac{\varepsilon_e}{n_e}\right), \qquad P_L = n_N^2 \left.\frac{\partial W_L}{\partial n_N}\right|_{Z,A,V_N,n_n} \tag{8.2.25}$$

Чтобы найти уравнение состояния, надо теперь задать функциональные зависимости W_N, W_L, ε_n и ε_e. В работе Бейма, Бете и Петика для ядерного вещества использовалась модель сжимаемой жидкой капли. В этой модели

$$W_N = A\left[(1-x)m_nc^2 + xm_pc^2 + W(k,x)\right] + W_C + W_S, \tag{8.2.26}$$

где W_C — кулоновская энергия, W_S — поверхностная энергия, а $W(k,x)$ — объемная энергия ядерного вещества на один нуклон при концентрации нуклонов

$$n \equiv \frac{2k^3}{3\pi^2}. \tag{8.2.27}$$

Объемная ядерная энергия $W(k,x)$ включает эффекты нуклон-нуклонных взаимодействий, но не включает поверхностные эффекты и кулоновское взаимодействие. Внутри ядра $n = A/V_N$. Для самосогласованного описания ту же функцию $W(k,x)$ следует использовать и для нейтрального газа, положив $x = 0$. Таким образом,

$$\varepsilon_n = n_n\left[W(k_n,0) + m_nc^2\right], \tag{8.2.28}$$

где[1)]

$$n_n \equiv \frac{2k_n^3}{3\pi^2}. \tag{8.2.29}$$

Величина $W(k,x)$ находится путем плавной интерполяции результатов многочастичных вычислений, сделанных в различных предельных случаях по k и x. Параметры в функции $W(k,x)$ определяются с помощью подгонки ядерных данных, как в полуэмпирической массовой формуле[2)]. Однако в отличие от такой формулы функция $W(k,x)$ зависит от плотности из-за наличия переменной k, в то время как полуэмпирические массовые формулы неявно предполагают, что плотность ядерного вещества совпадает с плотностью ядер при нормальных условиях. Определение функции W по заданному ядерному потенциалу будет рассмотрено в разд. 8.5—8.11.

Поверхностная энергия W_S, используемая в методе ВВР, обращается в нуль, когда плотность нейтронного газа равна плотности ядер.

Главный член в W_C равен $3Z^2e^2/5r_N$; это кулоновская энергия однородно заряженной сферы радиуса r_N, причем $V_N \equiv 4\pi r_N^3/3$. К этому члену добавляются различные небольшие поправки. В результате энергия заряженной сферы вместе с энергией решетки W_L равна

$$W_{C+L} = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{r_N}\left(1 - \frac{r_N}{r_c}\right)^2\left(1 + \frac{r_N}{2r_c}\right), \tag{8.2.30}$$

где

$$\frac{4\pi}{3} n_N r_c^3 \equiv 1. \tag{8.2.31}$$

Упражнение 8.2. Вывести результат (8.2.30) и обсудить предел $r_c/r_N \to 1$. Рассмотреть ядерную решетку в приближении ячейки Вигнера — Зейтца, предполагая, что каждое ядро — однородно заряженная сфера радиуса r_N и проницаемость ядра для электронов однородна.

Электроны прекрасно описываются как идеальный вырожденный ферми-газ. Ведущая поправка к этому описанию уже включена в член W_L, поэтому для ε_e можно принять обычное ультрарелятивистское выражение

$$\varepsilon_e = \frac{\hbar c}{4\pi^2}\left(3\pi^2 n_e\right)^{4/3}. \tag{8.2.32}$$

[1)] Отметим, что принятое в работе Бейма, Бете и Петика определение величины k_n отличается множителем $2^{1/3}$ от обычного определения плотности через волновое число Ферми k_F.

[2)] Полуэмпирическая массовая формула для ядерного вещества обсуждается в разд. 2.6.

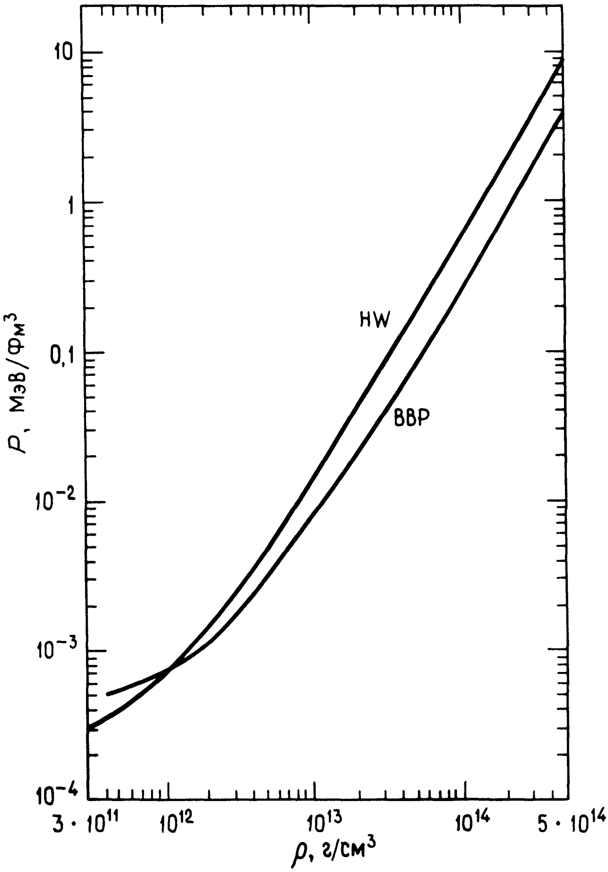

Рис. 8.1. Уравнение состояния Бейма — Бете — Петика (ВВР). Для сравнения показано уравнение состояния Гаррисона и Уилера (HW). (По работе [55].)

При известных функциях W_S и $W(\kappa, x)$ уравнение состояния может быть построено с помощью условий равновесия (8.2.6), (8.2.11), (8.2.15) и (8.2.18), причем давление определяется из формулы (8.2.24). Заметим, что условие образования нейтронных капель (т.е. существования нейтронного газа) имеет вид $\mu_n^{(G)} \geqslant m_n c^2$. Получаемое в конечном счете уравнение состояния ВВР показано на рисунках 2.2, 8.1 и 8.5а, а показатель адиабаты Г — на рисунках 2.3 и 8.2.

Основные свойства полученных методом ВВР результатов формулируются следующим образом. Во-первых, относительный вклад свободных нейтронов в полное давление возрастает с увеличением плотности. При об-

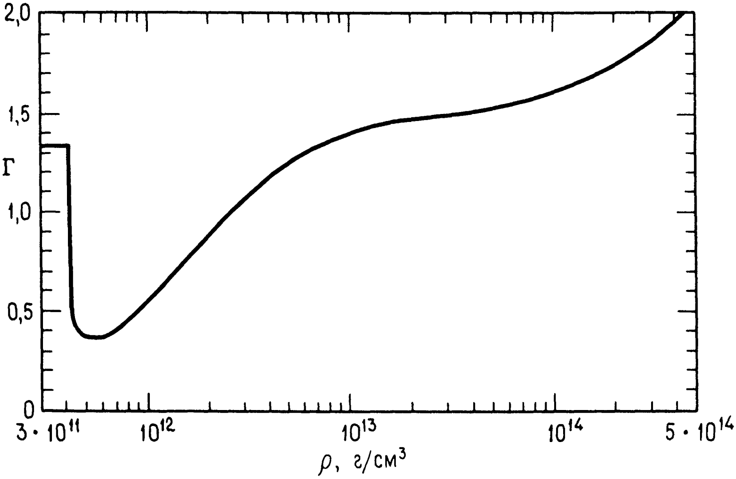

Рис. 8.2. Показатель адиабаты $\Gamma = d\ \ln P/d\ \ln\rho$ как функция ρ для уравнения Бейма — Бете — Петика. (По работе [55].)

разовании нейтронных капель давление почти полностью определяется электронами, однако при $\rho = 1{,}5 \cdot 10^{12}$ г/см^3 $P_n/P = 0{,}20$, а при $\rho = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ г/см^3 $P_n/P = 0{,}80$.

Во-вторых, вблизи точки образования нейтронных капель $\Gamma \simeq 4/3$ (ультрарелятивистский вырожденный электронный газ). При плотностях несколько выше точки образования нейтронных капель Γ резко падает, как показано на рис. 8.2. В работе ВВР получен закон этого падения:

$$\Gamma = \tfrac{4}{3}\left[1 - a\left(\rho - \rho_{\text{drip}}\right)^{1/2}\right], \tag{8.2.33}$$

где a — положительная постоянная. Причина падения Γ в том, что при низкой плотности нейтронный газ вносит заметный вклад в ρ, но мало меняет давление P. Показатель адиабаты не поднимается выше 4/3, пока плотность не станет выше $\rho \sim 7 \cdot 10^{12}$ г/см^3. Как мы увидим в гл. 9, этот результат приводит к важному следствию: плотности порядка величин, рассмотренных в этом разделе, не могут существовать в центральных областях устойчивых звезд[1)].

В-третьих, в работе ВВР [55] обнаружено, что ядра сохраняются в веществе вплоть до плотностей около $\rho \sim 2{,}4 \cdot 10^{14}$ г/см^3. Когда плотность достигает этого значения, ядра начинают соприкасаться, а при более высоких плотностях решетка разрушается и образуется ядерная жидкость.

[1)] Плотности такого порядка вполне могут существовать в поверхностных слоях: в критерий устойчивости входит среднее значение Γ [см. формулу (6.7.11)].

В-четвертых, при плотностях выше $2{,}4\cdot 10^{14}$ г/см^3 химический потенциал электронов удовлетворяет условию $\mu_e \gtrsim 104$ МэВ $\approx m_\mu c^2$, где m_μ — масса покоя мюона. При этом следует включить в уравнение состояния вклад мюонов. В работе ВВР вычисления проводятся до плотностей порядка $5\cdot 10^{14}$ г/см^3; при более высоких плотностях обычная теория ядерной материи неприменима.

Уравнение состояния ВВР подвергалось критике по некоторым пунктам (обсуждение и обзор можно найти в работе Кануто [104]). В частности, при этом подходе предсказывается монотонное возрастание Z с увеличением A, в то время как другие авторы предполагают, что при более аккуратном учете поверхностной энергии Z останется примерно постоянным на уровне ~ 40. Тогда зависимость $P(\rho)$ изменится мало, а Γ меняется несколько более заметно.

8.3. НУКЛОН-НУКЛОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В одной обзорной статье Бете заметил, что за предшествовавшую четверть столетия на изучение проблемы нуклон-нуклонного взаимодействия было затрачено больше рабочих человеко-часов, чем на какую бы то ни было научную задачу в истории человечества. А ведь эта оценка была сделана в 1953 году [62]!

Мы начнем изложение этого вопроса с общего обсуждения зависимости потенциала от спина и изоспина. В следующем разделе будет дан обзор некоторых общих свойств, которые должны быть присущи потенциалу, чтобы он позволил воспроизвести экспериментальные данные. Затем в разд. 8.5 и 8.6 мы обсудим зависимость потенциала от расстояния между нуклонами. Мы остановимся на одной частной модели потенциала, потенциале Юкавы, которая может рассматриваться как прототип потенциалов, используемых при более детальном анализе. Потенциал Юкавы будет использоваться как в классическом подходе (в разд. 8.6), так и в квантовом многочастичном уравнении (в разд. 8.7 и 8.8), чтобы показать, как можно получить уравнение состояния, исходя из ядерного потенциала. В ходе этого анализа будет показано, как потенциал используется для вычисления объемной энергии. Наконец, результаты более детальных исследований суммированы в разд. 8.9 и 8.10. Некоторые нерешенные проблемы рассмотрены в разд. 8.11—8.14. В последующих главах будет показано, как микрофизические свойства конденсированного вещества влияют на внутреннее строение нейтронных звезд, находящихся в равновесном состоянии.

Упражнение 8.3. Используя результаты разд. 2.5, оценить долю нейтронов в ядерной материи при плотности $\rho_{\text{nuc}} = 2{,}8\cdot 10^{14}$ г/см^3.

В нерелятивистском пределе можно считать, как и в электромагнетизме, что ядерные силы консервативны и не зависят от скорости ядра и по-