

8.4. НАСЫЩЕНИЕ ЯДЕРНЫХ СИЛ

Как следует из экспериментальных данных, за вычетом кулоновских и поверхностных эффектов энергия и объем ядер возрастают прямо пропорционально числу нуклонов A . Это свойство ядерных сил, уже принятое во внимание в полуэмпирической массовой формуле (2.6.4), называется *насыщением* по причине, которая объяснена в настоящем разделе.

Насыщение налагает жесткие ограничения на характер ядерных сил. Например, сравнительно простой потенциал притяжения вида

$$V(r) = V_1(r) + V_3(r)[3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] \quad (8.4.1)$$

довольно хорошо описывает все данные о нуклон-нуклонных системах в состояниях с $L=0$. Однако мы сейчас покажем, что столь простые потенциалы *не могут* быть положены в основу теории ядерных сил.

Полная энергия ядра имеет вид

$$E = T + W, \quad (8.4.2)$$

где T — кинетическая энергия, а W — потенциальная энергия. Потенциальную энергию можно считать суммой парных нуклон-нуклонных потенциалов $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$, т.е. суммой $A(A-1)/2$ отрицательных величин. В силу принципа запрета кинетическая энергия T определяется в основном статистикой Ферми,

$$T \sim AE'_F \sim An^{2/3} \sim A \left(\frac{A}{R^3} \right)^{2/3} = A^{5/3} R^{-2}, \quad (8.4.3)$$

где R — радиус ядра.

Значение R в основном состоянии определяется из условия минимума E . При больших A потенциальная энергия много больше кинетической, $W \sim A^2 \gg T$, так что основное состояние определяется, по существу, из условия минимума W . Следовательно, значение R определяется радиусом действия ядерных сил и не должно зависеть от A . (Ниже этот довод обсуждается более детально.) Более того, энергия связи E_b должна быть при этом пропорциональна A^2 . Оба предсказания явно противоречат экспериментальным данным. На самом деле $R \sim A^{1/3}$ (т.е. ядерная плотность постоянна, не зависит от A) и $E_b \sim A$.

Ядерные силы должны обладать каким-то свойством, которое приводит к «насыщению», т.е. к закону $E_b \sim A$. Это происходит при достаточно высоких плотностях в атомных ядрах, как и в любых системах, состоящих из нуклонов. Особенностью ядерных сил должно быть притяжение при небольшом числе нуклонов и отталкивание, когда нуклонов становится много. Насыщаются и химические силы: два атома водорода образуют молекулу, но третий атом не может к ним присоединиться. В ядерных силах насыщение возникает в результате влияния нескольких эффектов. Мы имеем в виду, в частности, принцип Паули, так называемые *обменные силы*, возникающие от членов, пропорциональных операторам P^B и P^T , и *отталки-*

вательный кор, потенциал, обеспечивающий сильное отталкивание на малых расстояниях.

Простое модельное вычисление дает количественную иллюстрацию того, как ядерный потенциал с чистым притяжением приводит к ядерному коллапсу с ростом A , в то время как наличие отталкивательного кора способствует насыщению.

Средняя кинетическая энергия системы, состоящей из A нуклонов и рассматриваемой как нерелятивистский газ, равна (см. упражнение 2.6)

$$T = \frac{3}{5} A E'_F = \frac{3}{10} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} A n^{2/3}. \quad (8.4.4)$$

Мы считаем здесь нуклоны тождественными частицами, так что каждому импульсу соответствует $(2l+1)(2s+1)=4$ состояния по спину и изоспину.

Взаимодействие между двумя нуклонами будем аппроксимировать прямоугольной ямой шириной b и глубиной V_0 . Пусть p — вероятность того, что расстояние между любыми двумя нуклонами не превышает b , тогда полная потенциальная энергия равна

$$W = - \frac{A(A-1)}{2} p V_0. \quad (8.4.5)$$

Если нуклоны находятся внутри сферического ядра радиусом R с однородным и некоррелированным пространственным распределением, то

$$p(b, R) = \frac{1}{\Omega^2} \int \int H(b - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (8.4.6)$$

где H — ступенчатая функция,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (8.4.7)$$

и

$$\Omega = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad n = \frac{A}{\Omega}. \quad (8.4.8)$$

Интеграл (8.4.6) вычислен в приложении В. Очевидно, что при $b > 2R$ подынтегральное выражение всюду равно единице, и $p = 1$. В общем случае

$$\begin{aligned} p(b, R) &= \left(\frac{b}{R} \right)^3 \left[1 - \frac{9}{16} \frac{b}{R} + \frac{1}{32} \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right], & R > \frac{b}{2}, \\ &= 1, & R < \frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

Упражнение 8.7. Оценить величину $V_0 b^2$, рассматривая основное состояние дейтрона и предполагая, что нуклон-нуклонный потенциал в дейтроне имеет вид трехмерной сферически-симметричной ямы глубиной V_0 и радиусом b . При $r > b$ потенциал равен нулю. Найти основное состояние в таком потенциале и, предполагая, что это основное состояние удовлетворяет условию $|E| \ll V_0$, показать, что

$$V_0 b^2 \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \approx 100 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^2, \quad (8.4.10)$$

где μ — приведенная масса. (Здесь $b \sim 1,4 \text{ Фм}$, что соответствует комптоновской длине волны пиона, и это приближение оправдано, поскольку энергия связи дейтрона $E = 2,225 \text{ МэВ}$.)

Полная энергия $E = T + W$ изображена на рис. 8.3 как функция R . При $R < b/2$ она не имеет минимума, а при $R > b/2$ можно записать

$$E = \frac{\alpha A^{5/3}}{R^2} - \frac{A(A-1)}{R^2} V_0 b^2 \frac{b}{2R} \left[1 - \frac{9}{16} \left(\frac{b}{R} \right) + \frac{1}{32} \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right], \quad (8.4.11)$$

где

$$\alpha = \frac{3}{10} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \approx 30 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^2. \quad (8.4.12)$$

Так как квадратная скобка в формуле (8.4.11) множится на величину, которая много больше T даже при умеренных значениях A , то энергия E минимальна при значениях R , лишь не намного больших, чем $b/2$. Действительно, полагая $dE/dR = 0$, получим при $A - 1 \approx A$

$$\frac{3V_0 b^2 A^{1/3}}{4\alpha} \frac{b}{R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{b}{R} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{R^3} \right) = 1. \quad (8.4.13)$$

Это уравнение можно решить численно относительно R . Помимо минимума вблизи $b/2$ (где выражение в скобках много меньше единицы), энергия имеет максимум при $R = R_1 \gg b$, где отношение b/R мало.

Вывод очевиден: если потенциальная энергия имеет вид (8.4.5), то ядра, сжатые до концентраций свыше $n = 3A/4\pi R_1^3$, коллапсируют к стабильному состоянию с радиусом $R \sim b/2$, где b — радиус ядерного взаимодействия. В этом состоянии энергия связи должна быть $E_b = -E\alpha A(A-1) \sim A^2$, что противоречит экспериментальным данным.

Предположим теперь, что на малых расстояниях существует отталкивание. Это приводит к появлению «запретной зоны» вокруг каждого нуклона, где волновая функция относительного движения должна исчезать. Так как при данной плотности объем, занимаемый нуклонами, при этом уменьшается, то импульсы нуклонов и кинетическая энергия ядра возрастают. При увеличении T по сравнению с W положение минимума полной энергии сдвигается к более разумным значениям.

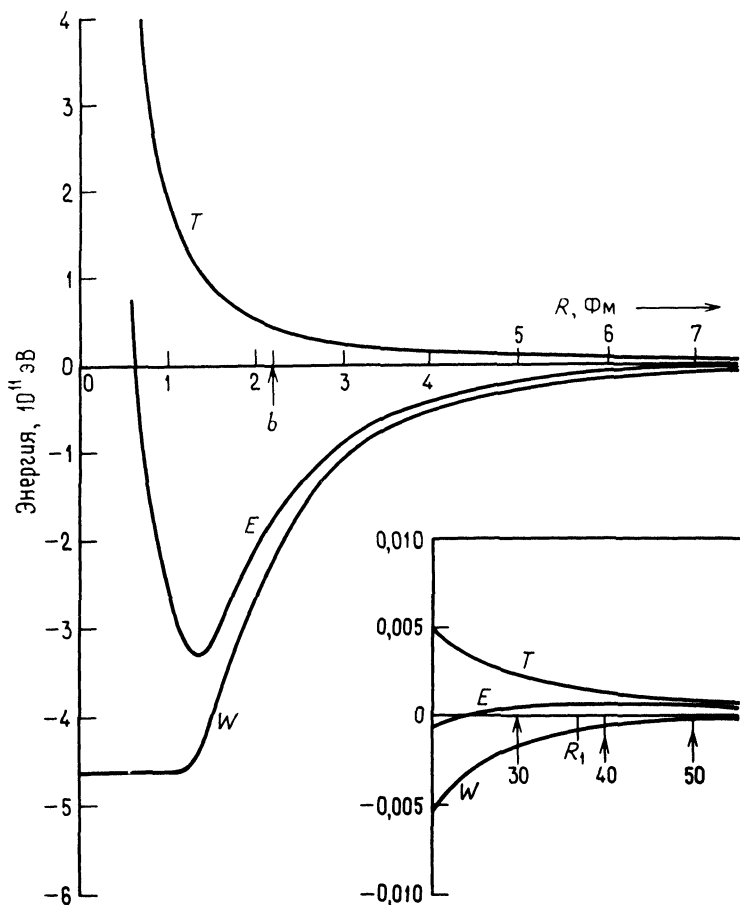


Рис. 8.3. Графики потенциальной энергии W , кинетической энергии T и полной энергии $E = W + T$ в зависимости от радиуса ядра R для системы тождественных нейтронов, взаимодействующих при наличии потенциала чистого притяжения. Точка R_1 — радиус, при котором энергия E максимальна. (По книге Блатта и Вайскопфа [75].)

Переходя к формулам, запишем

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (8.4.14)$$

где $2r_0$ — среднее расстояние между нуклонами. Вводя параметр r_c — радиус отталкивательного кора, выражение для кинетической энергии можно переписать следующим образом:

$$T = \frac{\alpha A^{5/3}}{R^2} = \frac{\alpha A}{r_0^2} \rightarrow \frac{\alpha A}{(r_0 - r_c)^2}. \quad (8.4.15)$$

Усредненное значение W меняется не очень сильно, если $r_0 > r_c$. Минимум модифицированного таким образом выражения (8.4.11) для полной энергии, как функции r_0 , определяется уравнением

$$\frac{3V_0 b^2}{4\alpha} \frac{b}{r_0} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{b}{r_0 A^{1/3}} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{r_0^3 A} \right) \left(1 - \frac{r_c}{r_0} \right)^3 = 1. \quad (8.4.16)$$

Численно решая это уравнение для r_0 , получим при $b = 1,8$ Фм и $r_c = 0,4$ Фм (это значение не противоречит данным о рассеянии при высоких энергиях):

$$0,9 \leq r_0 \text{ (Фм)} \leq 1,5 \quad \text{для} \quad 4 \leq A \leq 216. \quad (8.4.17)$$

Эту величину r_0 следует сравнить с экспериментальным значением¹⁾, $\sim 1,2$ Фм. Однако более важно то, что r_0 слабо зависит от A : из-за отталкивания на малых расстояниях возникает насыщение²⁾.

Итак, какова бы ни была форма потенциала ядерного взаимодействия, выбранная для вычисления уравнения состояния, основное требование, вытекающее из эксперимента, состоит в том, чтобы этот потенциал приводил к насыщению в ядерной материи. В первую очередь следует воспроизвести следующие четыре параметра:

1. Концентрация, при которой наступает насыщение,

$$n_0 \approx 0,16 \text{ нуклон/Фм}^3. \quad (8.4.18)$$

2 и 3. Энергия и сжимаемость симметричной ядерной материи. Эти величины выражаются через функцию $W(k, x)$, которая была введена в разд. 8.2 как объемная энергия ядерной материи на один нуклон. В симметричной ядерной материи ($Z = A/2$) $x = 1/2$. При плотности вблизи насыщения можно написать

$$W(k, \frac{1}{2}) = -W_V + \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{k}{k_0} \right)^2, \quad (8.4.19)$$

где, как можно получить из опыта,

$$W_V \approx 16 \text{ МэВ}, \quad K \equiv k^2 \left. \frac{\partial^2 W(k, \frac{1}{2})}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} \approx 240 \text{ МэВ} \quad (8.4.20)$$

Как следует из формул (8.2.27) и (8.4.18), $k_0 = 1,33 \text{ Фм}^{-1}$. Отметим, что величина K , называемая *модулем сжатия*, была определена из опыта лишь недавно [68, 374, 627, 628]. Ранее в различных расчетах уравнений состояния часто использовалась величина 300 МэВ.

¹⁾ См., например, книгу [159] и приведенные там ссылки.

²⁾ Количественное обсуждение роли обменных сил, способствующих возникновению насыщения в ядерной материи, для этой простой модели дано в книге [75], гл. 3.

4. Наконец, коэффициент объемной симметрии¹⁾ S_V , определяющий «кривизну» функции $W(k, x)$, связанную с изменением x :

$$S_V \equiv \frac{1}{8} \left. \frac{\partial^2 W(k_0, x)}{\partial x^2} \right|_{x=1/2} \approx 30 \text{ МэВ}. \quad (8.4.21)$$

Соответственно, при $k \approx k_0$ и $x \approx 1/2$ можно написать

$$W(k, x) = -W_V + \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{k}{k_0}\right)^2 + 4S_V \left(x - \frac{1}{2}\right)^2. \quad (8.4.22)$$

Упражнение 8.8. Используя тот факт, что чистый нейтронный газ не образует связанных состояний ни при какой плотности, рассмотреть применимость выражения (8.4.22) при $x \rightarrow 0$. Изобразить возможную кривую зависимости $W(k, 0)$ от k .

Указание. К какому пределу должно стремиться W , когда k (и соответственно n) стремится к нулю?

Используемые в настоящее время ядерные потенциалы обычно приводят к плотности насыщения, примерно вдвое превосходящей наблюдаемое значение. Отталкивательный кор находится из подгонки данных о фазах рассеяния при энергиях свыше 300 МэВ: $r_c \approx 0,4$ Фм, и эту величину нельзя изменить, чтобы добиться совпадения предсказываемой плотности насыщения с наблюдаемой. Помимо упомянутых выше есть еще один эффект, учет которого мог бы улучшить согласие данных — Δ -резонанс в $N\pi$ -системе при 1236 МэВ. Однако до сих пор не было выполнено надежных расчетов в этом направлении.

Проведенные недавно вариационные расчеты [207, 351] показали²⁾, что, используя только *двухнуклонные* потенциалы, достаточно хорошо описывающие лабораторные данные по рассеянию, нельзя получить правильные величины энергии основного состояния W_V , равновесной концентрации n_0 и сжимаемости K для ядерной материи, однако теорию можно хорошо согласовать с экспериментом, если ввести добавочное *трехнуклонное* взаимодействие. Необходимый вклад трехнуклонного взаимодействия феноменологически добавляется к энергии ядерной материи, причем вид этого вклада определяется из физических соображений.

¹⁾ Иногда для описания поверхностной энергии в модели жидкой капли вводят коэффициент *поверхностной симметрии* S_S , причем $W_S = \omega_S A^{2/3}$ и вблизи $x = 1/2$ $\omega_S(x) = \omega_S(1/2) - 4S_S(x - 1/2)^2$. Сравнение массовых формул с экспериментальными данными дает $\omega_S(1/2) \approx 20$ МэВ, но не позволяет найти S_S с определенностью.

²⁾ В этих вариационных расчетах одни только двухнуклонные взаимодействия с реалистическим потенциалом дают равновесное значение $k_0 = 1,7$ Фм⁻¹ и $-W_V = 17,5$ МэВ, что превышает эмпирические оценки. Вклад трехнуклонных взаимодействий можно подобрать таким образом, чтобы устранить это противоречие.