

(см. разд. 2.3). Эта модель дает грубую оценку объемной энергии ядерной материи, $W = \varepsilon/n - mc^2$, где мы использовали обозначения разд. 8.2 и 8.4. Уравнение состояния вычисляется по формуле

$$P = n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right). \quad (8.6.8)$$

В результате

$$P = P_{\text{kin}} \pm \frac{2\pi n^2 g^2}{\mu^2}, \quad (8.6.9)$$

где

$$P_{\text{kin}} = Kn^\Gamma \quad (8.6.10)$$

причем

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{5}{3} \quad (\text{нерелятивистский}) \\ &= \frac{4}{3} \quad (\text{ультрарелятивистский}) \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

соответственно в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях [см. формулу (2.3.26)].

Таким образом, мы видим, что при низких плотностях ($\rho \lesssim \rho_{\text{нuc}}$), когда можно ожидать, что ядерная сила дает притяжение, взаимодействие несколько уменьшает давление. Однако при высоких плотностях преобладает отталкивание, также описываемое потенциалом Юкавы, отвечающим обменом векторными частицами, и уравнение состояния в присутствии взаимодействия становится более «жестким». В пределе $\rho \equiv \varepsilon/c^2 \rightarrow \infty$ (т.е. при $n \rightarrow \infty$) уравнение состояния имеет вид

$$P \rightarrow \rho c^2. \quad (8.6.12)$$

При этом скорость звука стремится к скорости света,

$$c_s = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2} \rightarrow c, \quad (8.6.13)$$

в отличие от идеального релятивистского газа, для которого

$$P \rightarrow \frac{1}{3} \rho c^2, \quad c_s \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} c. \quad (8.6.14)$$

Мы вернемся к обсуждению этих результатов в гл. 9.

8.7. МЕТОД ХАРТРИ

Простейшее квантовое обобщение описанного в предыдущем разделе классического вычисления в нерелятивистском пределе получается с помощью

уравнений Хартри¹⁾. В этом приближении многонуклонная система описывается с помощью произведения одночастичных волновых функций,

$$\Psi = u_1(\mathbf{r}_1)u_2(\mathbf{r}_2) \cdots u_N(\mathbf{r}_N), \quad (8.7.1)$$

где состояние каждого нуклона полностью определяется его собственной нормированной волновой функцией $u_i(\mathbf{r}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). В этом выражении для функции Ψ полностью отброшены спиновые эффекты, а также корреляции между частицами, так как волновая функция i -й частицы равна u_i независимо от положения других частиц.

Спиновые эффекты можно включить дополнительно с помощью метода Хартри — Фока, описанного в следующем разделе. Корреляции учитываются путем введения в волновую функцию Хартри — Фока Ψ «корреляционных функций», причем полученное волновое уравнение решается в рамках некоторой приближенной схемы (см. разд. 8.9).

В приближении Хартри энергия основного состояния системы равна

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_i \int d^3V u_i^*(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) u_i(\mathbf{r}) + \\ + \sum_{i < j} \int \int d^3V_1 d^3V_2 V_{12} |u_i(\mathbf{r}_1)|^2 |u_j(\mathbf{r}_2)|^2, \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

где H — полный гамильтониан, и мы будем рассматривать случай, когда потенциал V_{12} имеет вид (8.6.1). Заметим, что в методе Хартри

$$\int |u_i(\mathbf{r})|^2 d^3V = 1, \quad (8.7.3)$$

но различные функции u_i не обязаны быть ортогональными друг другу.

Уравнение Хартри можно вывести, используя формулу (8.7.2) для формулировки вариационного принципа и допуская произвольные вариации функций u_i и u_i^* при выполнении условия (8.7.3). Это уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u_i + V_i u_i = \epsilon_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.7.4)$$

где эффективный потенциал i -й частицы равен

$$V_i(\mathbf{r}_1) = \sum_{j \neq i} \int d^3V_2 V_{12}(\mathbf{r}_{12}) |u_j(\mathbf{r}_2)|^2. \quad (8.7.5)$$

Вместо того чтобы решать уравнение (8.7.4) для функций u_i самосогласованным образом (это слишком трудная задача), мы будем искать энергию основного состояния системы методом теории возмущений. Предпо-

¹⁾ Подробное изложение метода Хартри можно найти, например, в книге [63], гл. 4.

ложим, что в низшем порядке функции u_i соответствуют свободным плоским волнам с импульсом $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$,

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{V}^{1/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (8.7.6)$$

Волновые функции нормированы здесь на объем $\mathcal{V} = L^3$, где $L \gg \mu^{-1}$ — линейный размер системы.

В соответствии со статистикой Ферми мы предположим, что низшие уровни энергии заполнены (каждый — двумя частицами) вплоть до $p = p_F$ (или $k = k_F$). Таким образом, сумма по i соответствует интегралу по \mathbf{k} до k_F . При этом волновая функция Ψ в формуле (8.7.1) описывает вырожденную систему с однородной плотностью, и функции u_i можно рассматривать как некоторую весьма ограниченную систему пробных функций в уравнении (8.7.2), использование которой имеет смысл только для слабых потенциалов взаимодействия. Это простейший квантовый аналог приближения Зельдовича.

Используя выражение (8.7.6), представим формулу (8.7.2) в виде

$$\langle H \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{p^2}{2m} \pm \frac{1}{2\sqrt{V}^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \iint d^3\mathcal{V}_1 d^3\mathcal{V}_2 g^2 \frac{\exp(-\mu r_{12})}{r_{12}}. \quad (8.7.7)$$

Присутствующий здесь двойной интеграл вычисляется точно так же, как в (8.6.3), и в результате

$$\langle H \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{p^2}{2m} \pm \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{2\pi g^2}{\sqrt{V} \mu^2}. \quad (8.7.8)$$

Теперь, как обычно, заменим

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{2}{h^3} \int d^3p = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (8.7.9)$$

так что

$$\sum_{\mathbf{k}} 1 = \frac{2}{h^3} \sqrt{V} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = n\sqrt{V},$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{p^2}{2m} = \sqrt{V} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} 4\pi p^2 dp = \sqrt{V} \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}. \quad (8.7.10)$$

В результате получаем полную плотность энергии,

$$\varepsilon \equiv \frac{\langle H \rangle}{\sqrt{V}} + nmc^2 = \varepsilon_{\text{kin}} \pm \frac{2\pi n^2 g^2}{\mu^2}, \quad (8.7.11)$$

точно совпадающую в нерелятивистском пределе с классическим результатом [см. формулы (8.6.6) и (8.6.7)].