

Упражнение 8.11. В пределе $\alpha \ll 1$ потенциал Юкавы переходит в кулоновский потенциал. Используя результаты, полученные в этом разделе, найдите обменную поправку к уравнению состояния холодного нерелятивистского газа электронов (см. разд. 2.4 и работу Солпитера [496]).

8.9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

Изложенный в предыдущем разделе метод Хартри — Фока не позволяет надлежащим образом учесть корреляции между нуклонами. Двухчастичные корреляции можно включить в многочастичную волновую функцию, записав ее в виде

$$\Psi = F\Phi, \quad (8.9.1)$$

где Φ — детерминант Слэтера, построенный из волновых функций, отвечающих плоским волнам, как в формуле (8.8.1), а F — симметризованное произведение двухчастичных корреляционных функций:

$$F = \prod_{i < j} f_{ij}. \quad (8.9.2)$$

Таким образом, волновая функция записывается в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = A \prod_{i < j} f_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \prod_m \phi_m(\mathbf{r}_m), \quad (8.9.3)$$

где A — оператор антисимметризации, действующий на спины, изоспины и координаты, а ϕ_m — волновые функции плоских волн с учетом спинов и изоспинов:

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}^{1/2}} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}} \chi(\sigma_m) \omega(\tau_m) \quad (8.9.4)$$

Волновая функция вида (8.9.3) называется *пробной функцией Джастроу*, она может быть использована для вариационного вычисления энергии основного состояния системы. Множители f_{ij} отражают препятствие сближению пар частиц на малые расстояния при наличии отталкивательного кора и потому выбираются таким образом, что равны единице на больших расстояниях и падают почти до нуля, когда величина $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ становится порядка радиуса кора r_c . Дополнительные корреляции могут возникнуть от других компонент силы, действующей между частицами (например, тензорных членов).

Общий метод вариационного расчета состоит в определении минимума среднего значения гамильтониана при варьировании функций f :

$$\delta \langle H \rangle = 0, \quad \text{где} \quad \langle H \rangle = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (8.9.5)$$

Обычно такие вариационные вычисления проводятся путем разложения величины $\langle H \rangle$ по кластерам:

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^N E_n. \quad (8.9.6)$$

Вклад n -частичного кластера E_n включает в себя $3n$ -кратные интегралы (по пространству координат частиц) от матричных элементов, присутствующих в формуле (8.9.5). Если плотность системы не слишком велика и корреляционные длины малы, то среднее значение $\langle H \rangle$ может быть найдено через вклады кластеров низкого порядка.

Существует много схем построения, усечения и суммирования кластерного разложения¹⁾. Как правило, определение детального выражения для энергии основного состояния требует вычисления сложных многократных интегралов, зависящих от ϕ_m и f_{ij} . Мы не будем выписывать здесь эти интегралы, а ограничимся тем, что в следующем разделе приведем сводку результатов одного из таких вариационных расчетов (в методе Бете — Джонсона).

Помимо вариационного метода системы сильно взаимодействующих фермионов можно анализировать также с помощью другого метода, основанного на теории ядерной материи Брюкнера, Бете и Голдстоуна (общее обсуждение этой теории можно найти, например, в книге [159]). В низшем порядке эта теория использует сумму вкладов от процессов двухчастичного рассеяния. В этом порядке она дает выражение, получаемое для энергии основного состояния в методе Хартри — Фока, но «исходный» потенциал $V(r)$ заменяется «одетым» потенциалом $V(r)$, который включает в себя поправки, связанные с многочастичным обменом. В целом этот подход можно рассматривать как разложение по параметру nr_c^3 , где n — концентрация нуклонов и r_c — радиус «твердого кора» (см. разд. 8.4). При малых значениях этого параметра справедливо приближение независимых пар частиц²⁾, на котором основана рассматриваемая теория; при больших значениях параметра приближение неприменимо.

Теория Брюкнера, Бете и Голдстоуна считается приемлемой при плотностях $\lesssim 2\rho_{\text{нук}}$. При более высоких плотностях повышается роль многочастичных кластеров и следует применять вариационный метод. Отметим, что в последнее время были достигнуты значительные успехи в вариационных расчетах, учитывающих как двух-, так и трехнуклонные взаимодействия [207, 351]. Эти расчеты позволяют получить результаты, соответствующие теории Брюкнера, Бете и Голдстоуна в низшем порядке для той обла-

¹⁾ См. обзоры Кларка [134] и Дэй [158], недавние работы Пандхарипанде, например [207] и [351], и приведенные там ссылки.

²⁾ В приближении независимых пар рассматривается движение двух взаимодействующих фермионов в присутствии других фермионов, играющих роль «наблюдателей» и влияющих на движение этих частиц только в силу принципа Паули.

сти, где можно ожидать, что оба подхода применимы. Кроме того, как уже было сказано, появляется возможность количественно проанализировать насыщение.

8.10. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ БЕТЕ — ДЖОНСОНА

В качестве примера мы приведем результаты Бете и Джонсона [64], которые использовали «ограниченный вариационный метод» Пандхарипанде [443] в низшем порядке. Были найдены уравнения состояния как для чистой ядерной материи, так и для материи, содержащей гипероны с массами, не превышающими массу Δ -резонанса (1236 МэВ). Принятый потенциал ядерного взаимодействия был подобен потенциалу, использованному ранее Рейдом [478], т.е. представлялся в виде суммы функций Юкавы с различными силами и радиусами взаимодействия. Коэффициенты в этом потенциале подбирались в каждой парциальной волне по отдельности, чтобы описать экспериментальные данные о нуклон-нуклонном рассеянии.

Как мы видели ранее, обмен векторными мезонами приводит к появлению отталкивания между нуклонами, в то время как обмен скалярными мезонами приводит к притяжению. Три векторных мезона с наименьшей массой — это ρ (769 МэВ), ω (783 МэВ) и ϕ (1019 МэВ). Из них наиболее сильная связь с нуклонами у ω : как следует из экспериментальных данных при высоких энергиях, $g_{\omega}^2/\hbar c = 10 \pm 2$. Поэтому Бете и Джонсон включили только обмен ω -мезонами: радиус действия соответствующих сил $\sim \mu_{\omega}^{-1} = \hbar/m_{\omega}c = 0,25$ Фм. Поскольку ω — изоскаляр, то отталкивательный кор не зависит от полного изоспина T нуклон-нуклонной системы. Одно из основных различий между потенциалами Рейда и Бете — Джонсона обусловлено именно наличием в последнем случае отталкивания, связанного с обменом ω -мезоном.

Таким образом, потенциал Бете — Джонсона берется в виде

$$V_{\text{ВJ}}(r) = \sum_j C_j \frac{e^{-jx}}{x} + V_T(r), \quad (8.10.1)$$

где

$$x \equiv \mu r, \quad \mu \equiv \frac{m_{\pi}c}{\hbar} = 0,7 \text{ Фм}^{-1}. \quad (8.10.2)$$

Коэффициенты C_j при $j \neq 1$ выбираются из сравнения с экспериментальными данными, а C_1 и тензорный потенциал (см. разд 8.3) берутся в соответствии с моделью однопионного обмена [см. [159], гл. 1, формула (3.5)]. Обмен (псевдо)скалярными пионами использован для получения в потенциале (8.10.1) дальнедействующего притяжения (радиус действия соответствующих сил равен $1/j\mu_{\pi}$, где $1/\mu_{\pi} = 5,5/\mu_{\omega}$, причем наиболее сильное притяжение связано с обменом двумя пионами, т.е. представляется членом с $j=2$).