

ложениями дают кое-какую информацию. Например, предположения о том, что десять хорошо наблюдаемых барстеров а) излучают как черное тело, б) имеют пиковую светимость, близкую к «эддингтоновскому пределу» ( $L_E = 1,3 \cdot 10^{18} M/M_\odot$  эрг/с для звезды массой  $\sim 1,4 M_\odot$ ), и в) расположены симметрично относительно центра Галактики на расстоянии  $\sim 9$  кпс, привели Ван Парадийса к заключению [586], что излучающая поверхность имеет радиус  $\sim 8,5$  км. При этом упрощенном анализе не учитывался ряд эффектов, например сильные магнитные поля, рассеяние на электронах и т.п. Это могло привести к занижению полученной оценки примерно в два раза.

---

*Упражнение 9.5.* Изучите следствия вывода, что нейтронные звезды могли бы иметь массу  $1,4 M_\odot$  и радиус  $\sim 8,5$  км в свете данных рис. 9.3.

---

## 9.5. МАКСИМАЛЬНАЯ МАССА

Возможность отождествления какого-либо компактного объекта с черной дырой зависит, в частности, от того, позволяют ли имеющиеся данные категорически утверждать, что масса наблюдаемого объекта больше максимально допустимой массы нейтронной звезды (или белого карлика). Однако, как мы видели в разд. 9.3, максимальная масса нейтронной звезды — это чувствительная функция пока еще неизвестного уравнения состояния ядерного вещества. Существуют ли какие-нибудь верхние пределы, которые можно наложить на массу нейтронной звезды и которые не зависят от деталей уравнения состояния в неизвестном режиме высокой плотности? Как ни удивительно, ответ на этот вопрос положительный.

Обсуждая предел массы в этом разделе, мы не учитываем эффект вращения. В следующем разделе будет показано, что он, вероятно, не играет важной роли. В отличие от случая белых карликов вращение не может существенно увеличить максимальную массу нейтронной звезды.

Общий анализ проблемы максимальной массы устойчивой нейтронной звезды был выполнен Родсом и Руффини [480], которые исходили из следующих предположений:

1. Общая теория относительности является точной теорией гравитации. В частности, это означает, что уравнение Оппенгеймера—Волкова определяет равновесную структуру.

2. Уравнение состояния удовлетворяет условию «микроскопической устойчивости»

$$\frac{dP}{d\rho} \geq 0. \quad (9.5.1)$$

Нарушение этого условия приводило бы к спонтанному коллапсу малых элементов вещества.

---

<sup>1)</sup> Эддингтоновский предел обсуждается в разд. 13.7.

3. Уравнение состояния удовлетворяет условию причинности

$$\frac{dP}{d\rho} \leq c^2, \quad (9.5.2)$$

т.е. скорость звука меньше скорости света.

4. Известно уравнение состояния ниже некоторой «сшивающей» плотности  $\rho_0$ .

Родс и Руффини выполнили вариационные вычисления, чтобы определить, какое уравнение состояния при плотности выше  $\rho_0$ , удовлетворяющее неравенствам (9.5.1) и (9.5.2), максимизирует величину массы. Согласно их вполне правдоподобному результату, такому уравнению соответствует знак равенства в (9.5.2); оно имеет вид

$$P = P_0 + (\rho - \rho_0)c^2, \quad \rho \geq \rho_0. \quad (9.5.3)$$

Они выбрали  $\rho_0 = 4,6 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup> и приняли уравнение состояния Гаррисона—Уилера для  $\rho < \rho_0$ . Этот выбор не играет решающей роли. Результат можно приблизительно оценить, считая значение  $M_{\max}$  пропорциональным  $(\rho_0)^{-1/2}$ . Лишь несколько процентов массы вносится из области с  $\rho < \rho_0$ . Уравнение состояния Гаррисона—Уилера находится в приемлемом согласии с более реалистичными уравнениями состояния — во всяком случае, реалистичные уравнения более жесткие.

Численное интегрирование уравнения Оппенгеймера—Волкова при уравнении состояния типа Гаррисона—Уилера ниже  $\rho_0$  и уравнении (9.5.3) выше  $\rho_0$  дает

$$M_{\max} \approx 3,2 \left( \frac{\rho_0}{4,6 \times 10^{14} \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2} M_{\odot}. \quad (9.5.4)$$

Этот результат можно получить заново с помощью приближенных аналитических вычислений при рассмотрении сфер с однородной плотностью в рамках общей теории относительности [418]. Предположим, что  $\rho$  и  $n$  постоянны внутри звезды. Уравнение состояния определяется плотностью  $\rho(n)$ , а давление дается первым законом термодинамики

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P/c^2}{n}. \quad (9.5.5)$$

Масса звезды равна

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad (9.5.6)$$

в то время как полное число барионов (при  $c = G = 1$ ) составляет [сравните с уравнением (5.7.9)]

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \int_0^R \frac{nr^2 dr}{[1 - 2m(r)/r]^{1/2}} \\ &= 2\pi n \left( \frac{3}{8\pi\rho} \right)^{3/2} (\chi - \sin \chi \cos \chi). \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

Величину  $\chi$  определим соотношением

$$\sin \chi = \left( \frac{8\pi\rho}{3} \right)^{1/2} R, \quad (9.5.8)$$

так что

$$\sin^2 \chi = \frac{2M}{R}. \quad (9.5.9)$$

Теперь в соответствии с энергетическим вариационным принципом (разд. 6.9) в равновесной конфигурации энергия должна быть экстремальной при заданном числе барионов

$$\left| \frac{\partial M}{\partial \chi} \right|_A = 0. \quad (9.5.10)$$

Здесь мы рассматриваем  $\chi$  как независимый вариационный параметр. Подставляя уравнения (9.5.5) — (9.5.8) в уравнение (9.5.10), находим

$$\frac{P}{\rho} = \zeta(\chi), \quad (9.5.11)$$

где

$$\zeta(\chi) \equiv \frac{6 \cos \chi}{9 \cos \chi - 2 \sin^3 \chi / (\chi - \sin \chi \cos \chi)} - 1. \quad (9.5.12)$$

Отметим, что этот результат отличается от решения упражнения 5.3. Там мы находили *точное* решение уравнения Оппенгеймера—Волкова для простого уравнения состояния  $\rho = \text{const}$ . Здесь же находится *приближенное* решение для любого уравнения состояния с использованием ограниченного класса пробных функций  $\rho = \text{const}$ ,  $n = \text{const}$  (и, следовательно,  $P = \text{const}$ ). Для данного уравнения состояния  $\rho(n)$  соотношения (9.5.5), (9.5.11), (9.5.8), (9.5.6) и (9.5.7) определяют  $P$ ,  $\chi$ ,  $R$ ,  $M$  и  $A$  как функции  $n$ .

*Упражнение 9.6.* Выведите уравнение (9.5.11).

*Упражнение 9.7.* Покажите, что условие  $0 \leq P/\rho \leq 1$  требует  $0 \leq \chi \leq 72,94^\circ$  и что  $P/\rho \rightarrow \infty$  при  $\chi \rightarrow 80,03^\circ$ .

*Упражнение 9.8.* Обсудите ньютоновский предел приведенных выше уравнений. В частности, покажите, что уравнение (9.5.11) сводится к виду

$$P \simeq \sqrt{\frac{|W|}{3}}, \quad (9.5.13)$$

где  $|W|$  — гравитационная потенциальная энергия сферы с однородной плотностью и с объемом  $\mathcal{V}$  [сравните с уравнениями (7.3.17), (7.3.8) и (7.3.23) в сферическом пределе  $e = 0$ ].

**Упражнение 9.9.** Покажите, что в ньютоновском пределе  $M \propto P^{3/2}/\rho^2$  и, следовательно,  $M$  растет с ростом  $n$ , если  $P$  увеличивается быстрее, чем  $\rho^{4/3}$ . Покажите, что в пределе высокой плотности, где  $P/\rho \sim \text{const}$ , вместо этого получается  $M \propto \rho^{-1/2}$ .

Упражнение 9.9 демонстрирует поведение  $M$ , о котором говорилось ранее:  $M \sim \rho^{-1/2}$ . Оно показывает также, что  $M$  достигает максимума при каком-то промежуточном значении  $n$ . Как обычно, наличие максимума связано с условием устойчивости, которое требует, чтобы

$$\left| \frac{\partial^2 M}{\partial \chi^2} \right|_A > 0. \quad (9.5.14)$$

После довольно громоздких вычислений это условие можно записать в виде условия, налагаемого на показатель адиабаты:

$$\Gamma > \Gamma_c(\chi), \quad (9.5.15)$$

где

$$\Gamma \equiv \frac{\partial \ln P}{\partial \ln n} = \left( 1 + \frac{\rho}{P} \right) \frac{dP}{d\rho}, \quad (9.5.16)$$

а критический показатель адиабаты равен

$$\Gamma_c(\chi) = (\zeta + 1) \left\{ 1 + \frac{(3\zeta + 1)}{2} \left[ \frac{(\zeta + 1)}{6\zeta} \text{tg}^2 \chi - 1 \right] \right\}. \quad (9.5.17)$$

**Упражнение 9.10.** Покажите, что в ньютоновском пределе

$$\Gamma_c = \frac{4}{3} + \frac{89}{105} \frac{M}{R}, \quad (9.5.18)$$

и сравните этот результат для постоянной плотности с уравнением (6.10.30) для политропы с  $n = 3$ .

Зависимость  $\Gamma_c$  от  $\zeta = P/\rho$  показана на рис. 9.7. Здесь можно нанести также показатель адиабаты для любого заданного уравнения состояния. Пересечение этой кривой с графиком  $\Gamma_c$  определяет точку начала неустойчивости. На рисунке показано релятивистское ограничение  $dP/d\rho \leq c^2$ , вытекающее из условия причинности. Оно требует  $\zeta \leq 0,364$ ,  $\chi \leq 64,19^\circ$ , так что

$$M/R \leq 0,405 \text{ (причинность + устойчивость)}. \quad (9.5.19)$$

Это соотношение можно сравнить с более слабым пределом, вытекающим из результатов упражнения 9.7.

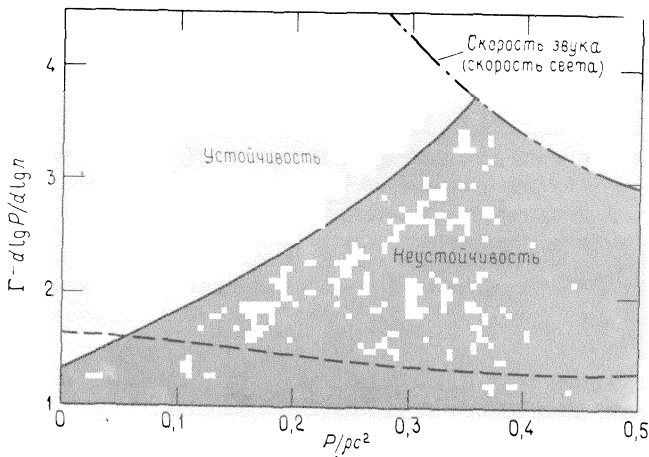


Рис. 9.7. Область устойчивости в приближении однородной плотности. Кривая, разделяющая области устойчивости и неустойчивости — это функция  $\Gamma_c$ , определенная в уравнении (9.5.17). Для иллюстрации штриховой линией показан показатель адиабаты  $\Gamma$  для газа свободных нейтронов [418].

**Упражнение 9.11.** Каково максимальное гравитационное красное смещение для излучения с поверхности устойчивой нейтронной звезды в соответствии с уравнением (9.5.19)?

Теперь мы готовы определить максимальную массу нейтронной звезды. Поскольку мы предположили, что знаем уравнение состояния при  $\rho \leq \rho_0$ , а также  $P_0 = P(\rho_0)$ , релятивистское ограничение  $dP/d\rho \leq c^2$  позволяет нам записать

$$P \leq P_0 + v^2(\rho - \rho_0), \quad \rho \geq \rho_0, \quad (9.5.20)$$

где  $v \leq 1$  — максимальная скорость звука выше  $\rho_0$ . Теперь при фиксированном значении  $\rho$  величина  $M$  увеличивается с увеличением  $P$  и, следовательно, с увеличением  $v$  [соотношения (9.5.6), (9.5.8), (9.5.11) и (9.5.20)]. Максимум достигается, когда  $P/\rho$  достигнет критического значения, обозначаемого  $\zeta_c$ : в этой точке  $\Gamma = \Gamma_c(\chi_c)$ , т.е.

$$\frac{\zeta_c + 1}{\zeta_c} v^2 = \Gamma_c, \quad (9.5.21)$$

как следует из уравнения (9.5.16). Подстановка предельного значения  $P/\rho$  из уравнения (9.5.21) в уравнение (9.5.20) устанавливает верхний предел на среднюю плотность звезды

$$\rho_c \geq \frac{\rho_0 - P_0/v^2}{1 - (\zeta_c + 1)/\Gamma_c}. \quad (9.5.22)$$

Это в свою очередь определяет верхний предел массы с использованием соотношений (9.5.6) и (9.5.8)

$$M \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - (\zeta_c + 1)/\Gamma_c}{\rho_0 - P_0/v^2} \right)^{1/2} \sin^3 \chi_c. \quad (9.5.23)$$

Окончательный предел массы был определен Науенбергом и Чаплином в виде функции от  $v$ . Они использовали уравнение состояния Бейма—Бете—Петика, чтобы установить наиболее надежное значение  $(\rho_0 - P_0/v^2)$ . Их значение  $\rho_0 = 5 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup> близко к «сшивочной» плотности Родса и Руффини, и, что не удивительно, предсказываемая ими максимальная масса при  $v = 1$

$$M_{\max} \sim 3,6 M_{\odot} \text{ (полуаналитический результат)} \quad (9.5.24)$$

близка к значениям Родса—Руффини (табл. 9.2). Обратите внимание, что а) максимальная масса увеличивается с ростом  $v$  и б)  $M_{\max} \sim \rho_0^{-1/2}$ , поскольку  $(\rho_0 - P_0/v^2) \sim \rho_0$  вблизи  $v = 1$ .

Наконец, отметим, что отказ от релятивистского ограничения приводит к строгому пределу на массу, если допустить, что общая теория относительности остается в силе. Предполагая  $v \rightarrow \infty$  в проведенном выше анализе, мы увидим, что  $\Gamma_c \rightarrow \infty$ . Из соотношения (9.5.17) видно, что в этом предельном случае  $\Gamma_c \sim \zeta^2$  и  $\zeta \rightarrow \infty$ , когда  $\chi \rightarrow 80,03^\circ$  (упражнение 9.7). Таким образом, из (9.5.23) следует

$$\begin{aligned} M_{\max} &\sim \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^{1/2} \sin^3 \chi_c \\ &= 6,05 \left( \frac{4,6 \times 10^{14} \text{ г/см}^3}{\rho_0} \right)^{1/2} M_{\odot}. \end{aligned} \quad (9.5.25)$$

Таблица 9.2

МАКСИМАЛЬНАЯ МАССА УСТОЙЧИВОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ <sup>1)</sup>

$v/c$	$\rho_0 = 5 \cdot 10^{14}$ г/см <sup>3</sup> $P_0 = 7 \cdot 10^{33}$ дин/см <sup>2</sup>	$\rho_0 = 1 \cdot 10^{15}$ г/см <sup>3</sup> $P_0 = 5 \cdot 10^{34}$ дин/см <sup>2</sup>
1,00	3,6	2,6
0,75	3,0	2,2
0,50	2,0	1,6
0,25	0,68	Неустойчивая

<sup>1)</sup> Параметры сшивания из уравнений состояния Бейма—Бете—Петика (второй столбец) и Рейда (третий столбец) (см. табл. 8.2).

Точный предел в общей теории относительности достигается для несжимаемой звезды. Из уравнения (5.7.13) следует <sup>1)</sup>

$$\left(\frac{M}{R}\right)_{\max} = \frac{4}{9}. \quad (9.5.26)$$

Тогда из (9.5.6) следует (в отсутствие релятивистских ограничений)

$$M_{\max} = \frac{8}{27} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2} \sim 5,3 \left(\frac{4,6 \times 10^{14} \text{ г/см}^3}{\rho_0}\right)^{1/2} M_{\odot}. \quad (9.5.27)$$

Более тщательный расчет<sup>2)</sup>, в котором допускается существование оболочек с  $\rho < \rho_0$ , дает значение  $5,2 M_{\odot}$ .

Подводя итоги, можно сказать, что жесткие уравнения состояния предсказывают в настоящее время  $M_{\max}$  в интервале  $(1,5 + 2,7)M_{\odot}$ . В зависимости от предположений, касающихся ограничений на возможные уравнения состояния, общая теория относительности предсказывает абсолютный верхний предел в диапазоне  $(3 + 5) M_{\odot}$ . Более высокие значения возможны только в том случае, если отказаться от релятивистского ограничения  $dP/d\rho \leq c^2$ <sup>3)</sup>.

## 9.6. ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ

Устанавливая пределы максимальной массы нейтронной звезды, мы предполагали, что конфигурации невращающиеся и сферические. Вообще говоря, это неверно; мы знаем, что пульсары вращаются. Более того, нам известно, что в случае белых карликов вращение в принципе можно значительно увеличить максимальную массу (разд. 7.4). В этом разделе мы покажем, что в отличие от белых карликов, как свидетельствуют имеющиеся расчеты, вращение *не может* заметно увеличить максимальную массу нейтронной звезды ( $\leq 20\%$ ). Кроме того, даже это увеличение возможно лишь при таких частотах вращения, которые много выше всех наблюдаемых частот пульсаров.

<sup>1)</sup> Доказательство того, что это действительно максимум, см., например, в [606]. Можно добиться более высоких значений, если допустить, чтобы плотность возрастала при удалении от центра; см., например, [79].

<sup>2)</sup> См. [263] и помещенные там ссылки.

<sup>3)</sup> Акустические сигналы распространяются в среде со скоростью  $(dP/d\rho)^{1/2}$ , которая, вообще говоря, является функцией частоты. Уравнение состояния для равновесной звезды дает по существу низкочастотный ( $\omega \rightarrow 0$ ) предел этой функции, так как допускается достаточно большое время достижения равновесия. Если предположить  $dP/d\rho > c^2$  при сохранении условия причинности, то среда спонтанно становится неустойчивой. См., например, [76].