Точный предел в общей теории относительности достигается для несжимаемой звезды. Из уравнения (5.7.13) следует [1])

$$\left(\frac{M}{R}\right)_{\max} = \frac{4}{9}. \tag{9.5.26}$$

Тогда из (9.5.6) следует (в отсутствие релятивистских ограничений)

$$M_{\max} = \frac{8}{27}\left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2} \sim 5{,}3\left(\frac{4{,}6 \times 10^{14}\ \text{г/см}^3}{\rho_0}\right)^{1/2} M_\odot. \tag{9.5.27}$$

Более тщательный расчет[2]), в котором допускается существование оболочки с $\rho < \rho_0$, дает значение $5{,}2\, M_\odot$.

Подводя итоги, можно сказать, что жесткие уравнения состояния предсказывают в настоящее время $M_{\max}$ в интервале $(1{,}5 \div 2{,}7) M_\odot$. В зависимости от предположений, касающихся ограничений на возможные уравнения состояния, общая теория относительности предсказывает абсолютный верхний предел в диапазоне $(3 \div 5)\ M_\odot$. Более высокие значения возможны только в том случае, если отказаться от релятивистского ограничения $dP/d\rho \leqslant c^2$ [3]).

9.6. ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ

Устанавливая пределы максимальной массы нейтронной звезды, мы предполагали, что конфигурации невращающиеся и сферические. Вообще говоря, это неверно; мы знаем, что пульсары вращаются. Более того, нам известно, что в случае белых карликов вращение в принципе можно значительно увеличить максимальную массу (разд. 7.4). В этом разделе мы покажем, что в отличие от белых карликов, как свидетельствуют имеющиеся расчеты, вращение *не может* заметно увеличить максимальную массу нейтронной звезды ($\lesssim 20\%$). Кроме того, даже это увеличение возможно лишь при таких частотах вращения, которые много выше всех наблюдаемых частот пульсаров.

---

[1]) Доказательство того, что это действительно максимум, см., например, в [606]. Можно добиться более высоких значений, если допустить, чтобы плотность возрастала при удалении от центра; см., например, [79].

[2]) См. [263] и помещенные там ссылки.

[3]) Акустические сигналы распространяются в среде со скоростью $(dP/d\rho)^{1/2}$, которая, вообще говоря, является функцией частоты. Уравнение состояния для равновесной звезды дает по существу низкочастотный ($\omega \to 0$) предел этой функции, так как допускается достаточно большое время достижения равновесия. Если предположить $dP/d\rho > c^2$ при сохранении условия причинности, то среда спонтанно становится неустойчивой. См., например, [76].

Быстро вращающиеся конфигурации в общей теории относительности построить технически трудно. Кроме того, для этого случая неизвестен простой критерий устойчивости. Существующие расчеты предполагают а) медленное вращение [2, 262, 264], или б) твердотельное вращение и однородные конфигурации [95, 96], или в) постньютоновскую гравитацию и уравнение состояния идеального газа Ферми [530]. Численные расчеты Баттеруорта и Ипсера [95, 96] являются единственным экскурсом в область сильной гравитации и быстрого вращения. Ради простоты мы будем следовать аналитическому рассмотрению Лайтмана и Шапиро [530] и придем фактически к тем же выводам, что и при анализе случая сильных полей.

Начнем с энергетического вариационного принципа, так изменив уравнение (9.2.16), чтобы учесть вращение, как в уравнении (7.4.35)

$$E = AM\rho_c^{2/3} - Bg(\lambda)M^{5/3}\rho_c^{1/3} - CM\rho_c^{4/3} - DM^{7/3}\rho_c^{2/3} + k_5\lambda J^2 M^{-5/3}\rho_c^{2/3}. \tag{9.6.1}$$

Здесь E — энергия вращающейся нейтронной звезды, которая, как предполагается, должна быть близкой к политропе с $n = 3/2$ в постньютоновском пределе. Влияние вращения учитывается посредством приближения, описанного в разд. 7.4. Величины A, B, C и D определены в уравнении (9.2.17), а параметр сплюснутости λ и функция $g(\lambda)$ — в уравнениях (7.4.28) и (7.4.29). Величина k_5 [уравнение (7.4.34)] имеет значение 1,926 для $n =$ $= 3/2$.

Условие равновесия $\partial E/\partial\lambda = 0$ при фиксированных значениях M и J дает обычное соотношение между $T/|W|$ и эксцентриситетом [уравнения (7.4.36) и (7.4.37)]. Второе условие равновесия — это $\partial E/\partial\rho_c = 0$ (значения M и J фиксированы). Решение двух этих уравнений одновременно дает равновесное соотношение между M и ρ_c для различных значений J [530].

Максимальная масса определяется приравниванием нулю второй производной $\partial^2 E/\partial\rho_c^2 = 0$ (это условие возникновения радиальной неустойчивости).

Упражнение 9.12. Покажите, что определение $T/|W|$ и два уравнения $\partial E/\partial\rho =$ $= \partial^2 E/\partial\rho^2 = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{k_5 J^2 \rho_c^{1/3}}{BM^{10/3}} = \frac{T}{|W|}\frac{g(\lambda)}{\lambda}, \tag{9.6.2}$$

$$\rho_c = \frac{BgM^{2/3}}{8C}, \tag{9.6.3}$$

$$2A + (Bg)^{2/3}C^{1/3}\left(-3 + \frac{4T}{|W|}\right)M^{4/9} - 2DM^{4/3} = 0. \tag{9.6.4}$$

Таблица 9.3

МАКСИМАЛЬНЫЕ МАССЫ ДЛЯ НЬЮТОНОВСКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД [1)]

J, 10^{49} г·см²/с	$T/\|W\|$	M_{max}, $M_{\odot}$	ρ_c, 10^{15} г/см³
0,00	0,00	1,03	7,41
0,21	0,02	1,06	7,57
0,32	0,04	1,09	7,73
0,42	0,06	1,12	7,88
0,53	0,08	1,15	8,04
0,64	0,10	1,18	8,19
0,76	0,12	1,21	8,34
0,89	0,14	1,24	8,48
1,03	0,16	1,27	8,61
1,19	0,18	1,31	8,74
1,37	0,20	1,34	8,85
1,56	0,22	1,38	8,96
1,72	0,24	1,40	9,02
2,02	0,26	1,44	9,11

[1)] Значения M_{max} не совсем такие, как в работе [530], где приводятся массы покоя.

Уравнения (9.6.2) — (9.6.4) можно решить следующим образом: выбрать значение λ и, следовательно, найти $g(\lambda)$ и $T/|W|$. Затем решить уравнение (9.6.4), которое является кубическим относительно $M^{4/9}$, для нахождения M. Уравнение (9.6.3) далее даст значение ρ_c, а (9.6.2) — значение J. Результаты приведены в табл. 9.3.

Вычислительное упражнение 9.13. Проверьте данные табл. 9.3. Обратите внимание, что вам придется добавить E/c^2 к M, чтобы получить полную массу [см. обсуждение после уравнения (9.2.23)].

Поскольку простые результаты, касающиеся возникновения неосесимметричных неустойчивостей в общей теории относительности, неизвестны, предположим, что сохраняют силу приближенные ньютоновские критерии $T/|W| \leqslant 0{,}14$ для вековой устойчивости и $T/|W| \leqslant 0{,}26$ для динамической устойчивости. Фридман и Шутц [208] показали, что типичный временной масштаб гравитационного излучения при $T/|W| \sim 0{,}14$ не превышает года (сравните с упражнением 16.7). Очевидно, что такие нейтронные звезды не проживут долго. Из табл. 9.3 видно, что максимальное возрастание M_{max}, обусловленное вращением (используем $T/|W| = 0{,}14$), составляет

$$\frac{1{,}24 - 1{,}03}{1{,}03} \simeq 20\% \cdot \tag{9.6.5}$$

Однако следует ясно представлять, что приведенное выше рассмотрение равновесных моделей вращающихся нейтронных звезд, по-видимому, надежно только для конфигураций с малой массой: $M < M_\odot$. Приближение с $n = 3/2$ нельзя считать достаточно хорошим при значениях ρ_c, приведенных в табл. 9.3 [сравните с уравнением (2.3.25)]. Кроме того $GM/Rc^2 > 0{,}2$ для всех значений [R получается из уравнения (3.3.9)], так что постньютоновское приближение также неприменимо. Тем не менее, качественный результат, согласно которому вызванное вращением увеличение M_{max} равно $\sim$ 20% (сравните с 70% для белых карликов), совместим с более детальными численными расчетами Баттеруорта и Ипсера.

Это различие между нейтронными звездами и белыми карликами подчеркивается, если уравнение (9.6.4) переписать в виде

$$M = \left(\frac{2A - 2DM^{4/3}}{3B^{2/3}C^{1/3}}\right)^{9/4}\left[\frac{1}{g^{2/3}(1 - 4T/3|W|)}\right]^{9/4}. \tag{9.6.6}$$

Член в квадратных скобках представляет собой увеличение массы M, связанное с вращением, и он одинаково эффективен для белых карликов и нейтронных звезд. Член, пропорциональный D, представляет собой *уменьшение M*, связанное с релятивистской теорией гравитации. Отношение этого члена к ньютоновскому члену $2A$ равно GM/Rc^2, так что им можно пренебречь для белых карликов, но не для нейтронных звезд.

Более точное определение M_{max} требует детального численного анализа быстро вращающихся полностью релятивистских нейтронных звезд и критериев их устойчивости.