лить расстояние до него с приемлемой точностью. Полученное таким образом значение составляет около 50 пс [501].

Упражнение 10.1. Покажите, что предположение о ненулевой массе фотона $m_\gamma \neq 0$ приводит в низшем приближении к дисперсионному закону с той же зависимостью от частоты, что и в уравнении (10.4.13)[1].

10.5. МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ ДЛЯ ПУЛЬСАРОВ

В этом разделе мы обсудим очень простую модель пульсара, которая объясняет многие из наблюдаемых свойств этих объектов. Модель *магнитного диполя* [251, 437, 438] ясно показывает, как кинетическая энергия вращающейся нейтронной звезды преобразуется в излучение пульсара. В этом модельном варианте *наклонного ротатора* предполагается, что нейтронная звезда равномерно вращается с частотой Ω *в вакууме* и обладает магнитным моментом $\mathbf{m}$, ориентированным под углом α к оси вращения. Ниже этой модели будут противопоставлены невакуумные модели (например, соосный ротатор)[2]. Предполагается, что вращение является достаточно медленным, чтобы в первом приближении можно было пренебречь отклонениями от сферичности, связанными с вращением.

Упражнение 10.2. Оцените отношение центробежного и гравитационного ускорений на экваторе пульсара в Крабовидной туманности.

Независимо от геометрии внутреннего поля чисто дипольное магнитное поле на магнитном полюсе звезды B_p связано с $\mathbf{m}$ соотношением

$$|\mathbf{m}| = \frac{B_p R^3}{2}, \tag{10.5.1}$$

где R — радиус звезды. (Сравните с уравнением (5.56) работы [297].) Такая конфигурация обладает переменным во времени дипольным моментом, если смотреть из бесконечности, и поэтому она излучает энергию со скоростью

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^3}|\ddot{\mathbf{m}}|^2. \tag{10.5.2}$$

Если записать

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}B_p R^3\left(\mathbf{e}_{\parallel}\cos\alpha + \mathbf{e}_{\perp}\sin\alpha\cos\Omega t + \mathbf{e}'_{\perp}\sin\alpha\sin\Omega t\right), \tag{10.5.3}$$

---

[1] Допустив, что вся дисперсия пульсара в Крабовидной туманности вызвана тем, что фотоны обладают ненулевой массой, Фейнберг [193] наложил предел $m_\gamma < 10^{-44}$ г на массу фотона!

[2] У такого ротатора магнитная ось параллельна оси вращения. — *Прим. перев.*

где $\mathbf{e}_\parallel$ — единичный вектор, параллельный оси вращения, а $\mathbf{e}_\perp$ и $\mathbf{e}_\perp{}'$ — фиксированные взаимно ортогональные единичные векторы, перпендикулярные $\mathbf{e}_\parallel$, то найдем

$$\dot{E} = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2\alpha}{6c^3}. \qquad (10.5.4)$$

Отметим, что это излучение испускается на частоте Ω.

Уравнение (10.5.4) приводит к нескольким важным следствиям. Во-первых, уносимая излучением энергия порождается кинетической энергией вращения нейтронной звезды:

$$E = \tfrac{1}{2} I \Omega^2, \qquad (10.5.5)$$

где I — момент инерции. Таким образом,

$$\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega}. \qquad (10.5.6)$$

Поскольку $\dot{E} < 0$, то и $\dot{\Omega} < 0$, т.е. пульсар *замедляется.* Если определить характеристическое время на данный момент как

$$T \equiv -\left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}}\right)_0 = \frac{6Ic^3}{B_p^2 R^6 \sin^2\alpha\, \Omega_0^2}, \qquad (10.5.7)$$

то уравнения (10.5.4) и (10.5.6) можно проинтегрировать, что дает

$$\Omega = \Omega_i \left(1 + \frac{2\Omega_i^2}{\Omega_0^2}\frac{t}{T}\right)^{-1/2}, \qquad (10.5.8)$$

где Ω_i — начальная угловая скорость при $t = 0$. Положив $\Omega = \Omega_0$ в уравнении (10.5.8), получим современный возраст пульсара

$$t = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_i^2}\right) \simeq \frac{T}{2} \qquad \text{для } \Omega_0 \ll \Omega_i. \qquad (10.5.9)$$

В работах [249, 250] приводится значение T для пульсара в Крабовидной туманности, равное 2486 лет по состоянию на 1972 г., что предполагает возраст этого пульсара 1243 года. Этот результат сравнительно хорошо согласуется с фактическим возрастом 918 лет (1972 − 1054). Обратите внимание, что эта оценка, впервые полученная таким образом Ганном и Острайкером [251], *не* зависит от деталей рассматриваемой модели нейтронной звезды. Она зависит только от общего характера поведения функции $\Omega(t)$, связанного с излучением магнитного диполя. Согласие можно улучшить, если допустить существование других механизмов потери энергии, например гравитационного излучения (что будет описано ниже).

Модель магнитного диполя может быть использована также для количественного расчета энергетики пульсара в Крабовидной туманности. Следуя Ганну и Острайкеру, предположим, что пульсар в Крабовидной туманности — это сферическая нейтронная звезда с массой $M = 1{,}4\,M_{\odot}$, радиусом $R = 12$ км и моментом инерции $I = 1{,}4 \cdot 10^{45}$ г · см^2. Тогда уравнения (10.5.5) и (10.5.6) дают

$$E = 2{,}5 \cdot 10^{49}\ \text{эрг}; \quad \dot{E} = 6{,}4 \cdot 10^{38}\ \text{эрг/с}. \tag{10.5.10}$$

(Чтобы получить эти величины, достаточно знать лишь значение I.) В нашем случае уравнения (10.5.5) и (10.5.6) не зависят от деталей механизма потерь энергии, а вытекают из предположения, что пульсар — это вращающаяся нейтронная звезда, вращение которой служит источником энергии. Поэтому примечательно, что величина $\dot{E}$ сравнима с вытекающими из наблюдений оценками энергии (кинетической и радиационной) Крабовидной туманности, которые соответствуют значению $5 \cdot 10^{38}$ эрг/с [380]. На это согласие впервые указал Голд [228], который отметил также, что достаточно эффективный механизм ускорения излучающих релятивистских электронов в окружающей туманности позволяет объяснить, каким образом высокая энергия электронов поддерживается в течение более чем 900 лет после взрыва сверхновой.

Заметим, что значение $\dot{E}$ в (10.5.10) много больше, чем энергия наблюдаемого излучения в *радиоимпульсе*, составляющая для пульсара в Крабовидной туманности около 10^{31} эрг/с.

Используя значение E для пульсара в Крабовидной туманности (10.5.10) и принимая модель магнитного диполя, т.е. уравнение (10.5.4), получим

$$B_p = 5{,}2 \cdot 10^{12}\ \text{Гс} \quad (\sin\alpha = 1). \tag{10.5.11}$$

Такое значение естественно получается при анализе коллапса звезд главной последовательности с типичным «вмороженным» магнитным полем на поверхности порядка 100 Гс. Уменьшение радиуса примерно в 10^5 раз приводит к увеличению B_p в 10^{10} раз. Большинство полученных теоретических значений напряженности поверхностного магнитного поля для других пульсаров имеет такую же величину, что и в (10.5.11).

Примечательно, что недавние наблюдения за рентгеновскими пульсарами в двойных системах (гл. 13) дают сравнимые значения напряженности поверхностного магнитного поля. Трюмпер и др. [574] наблюдали заметную деталь в пульсирующем жестком рентгеновском спектре Her X-1, а Уитон и др. [609] наблюдали подобную деталь в спектре источника 4U 0115 – 63. Интерпретация этих деталей как циклотронных линий приводит к значениям

$$B \sim (4 \div 6) \cdot 10^{12}\ \text{Гс в Her X-1},$$

$$B \sim 2 \cdot 10^{12}\ \text{Гс в 4U 0115} - 63. \tag{10.5.12}$$

Характерные для пульсаров сильные магнитные поля, по-видимому, возникают при образовании пульсаров. Может ли такое поле затухнуть?

Время затухания t_d приблизительно равно

$$t_d \sim \frac{\sigma L^2}{c^2}, \qquad (10.5.13)$$

где L — характерная длина, а σ — проводимость [сравните с уравнением (7.1.8)]. Исходя из соображений размерности, электрическую проводимость можно выразить через m_e, c и e:

$$\sigma \sim \frac{m_e c^3}{e^2} \sim 10^{23}\ \text{с}^{-1}. \qquad (10.5.14)$$

Используя это значение σ и положив $L = R$ в соотношении (10.5.13), оценим, что для «типичной» (однородной) нейтронной звезды $t_d \sim 10^6$ лет, что много больше возраста пульсара в Крабовидной туманности.

Фактическое значение σ зависит от детального характера взаимодействия электронов с веществом звезды и может сильно отличаться от значения (10.5.14). Однако в любом случае затухание магнитных полей пульсаров за время их жизни должно быть мало[1].

Как упоминалось выше, один из путей согласования теоретического и фактического возрастов пульсара в Крабовидной туманности состоит в привлечении механизма гравитационного излучения. Самый низкий порядок гравитационного излучения — квадрупольный (см. гл. 16), поэтому, чтобы излучать, нейтронная звезда должна обладать переменным во времени квадрупольным моментом. Модель нейтронной звезды в виде слегка деформированного однородного эллипсоида с моментом инерции I и эллиптичностью ε, где

$$\varepsilon = \frac{\text{разность экваториальных радиусов}}{\text{средний экваториальный радиус}} = \frac{a - b}{(a + b)/2}, \qquad (10.5.15)$$

дает [сравните с уравнением (16.6.9)]

$$\dot{E}_{\text{GW}} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5} I^2 \varepsilon^2 \Omega^6 =$$

$$= (1{,}4 \cdot 10^{38}\ \text{эрг/с}) \left(\frac{I}{1{,}4 \cdot 10^{45}\ \text{г} \cdot \text{см}^2}\right)^2 \left(\frac{P}{0{,}0331\ \text{с}}\right)^6 \frac{\varepsilon^2}{3 \cdot 10^{-4}}. \qquad (10.5.16)$$

---

[1] См. [188], где подчеркивается, что затухание магнитного поля, если оно вообще есть, происходит только в самых внешних областях звезды. Длительное существование сильных магнитных полей в пульсирующих рентгеновских источниках (гл. 13 и 15) наводит на мысль о длительном времени затухания магнитного поля в нейтронных звездах, превышающем, по-видимому, несколько миллионов лет даже около поверхности.

Согласно уравнению (10.5.16), небольшая эллиптичность может приводить к излучению, требуемому для объяснения замедления пульсара в Крабовидной туманности, соответствующего (10.5.10). Такая эллиптичность[1] может быть вызвана внутренними анизотропными магнитными полями с напряженностью 10^{15} Гс, которым соответствуют внутренние поля звезд главной последовательности порядка 10^5 Гс непосредственно перед коллапсом.

Отметим также, что в случае постоянной эллиптичности ε закон замедления выглядит так:

$$\dot{E}_{\mathrm{GW}} = I\Omega\dot{\Omega} \propto \Omega^6. \tag{10.5.17}$$

Определив

$$T_{\mathrm{GW}} \equiv -\left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}}\right)_0, \tag{10.5.18}$$

можно проинтегрировать уравнение (10.5.17) и получить

$$\Omega = \Omega_i\left(1 + \frac{4\Omega_i^4}{\Omega_0^4}\frac{t}{T_{\mathrm{GW}}}\right)^{-1/4}, \tag{10.5.19}$$

где Ω — начальная угловая скорость при $t = 0$. Подстановка $\Omega = \Omega_0$ в уравнение (10.5.19) дает выражение для современного возраста пульсара

$$t = \frac{T_{\mathrm{GW}}}{4}\left(1 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega_i^4}\right) < \frac{2486}{4} = 621 \text{ год.} \tag{10.5.20}$$

Таким образом, *одно* лишь гравитационное излучение *не* позволяет объяснить замедление пульсара в Крабовидной туманности. Тем не менее, можно найти такую *комбинацию* гравитационного и магнитно-дипольного излучения, которая дает как правильный возраст, так и наблюдаемые темпы замедления пульсара [432].

Упражнение 10.3. В рамках комбинированной модели

$$I\Omega\dot{\Omega} = -\beta\Omega^4 - \gamma\Omega^6, \tag{10.5.21}$$

где β и γ определяются уравнениями (10.5.4) и (10.5.16). Тогда

$$\frac{1}{T} \equiv -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\bigg|_0 = \frac{\beta\Omega_0^2 + \gamma\Omega_0^4}{I}. \tag{10.5.22}$$

а) Проинтегрируйте уравнение (10.5.21) и найдите возраст

$$(1 + \lambda)\left(1 - \mu + \lambda\log\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 1}\right) = \frac{2t}{T}, \tag{10.5.23}$$

---

[1] Вопрос об эллиптичности нейтронной звезды обсуждается подробнее в разд. 10.11 и 16.6.

где

$$\lambda \equiv \frac{\gamma \Omega_0^2}{\beta}, \qquad \mu \equiv \frac{\Omega_0^2}{\Omega_i^2}. \tag{10.5.24}$$

б) Используя значения $t = 918$ лет, $T = 2486$ лет, покажите, что решением уравнения (10.5.23) является $\lambda = 0{,}271$ и что оно нечувствительно к μ для $\mu \leqslant 0{,}01$.

в) Отсюда покажите, что

$$\varepsilon = 2{,}9 \cdot 10^{-4}, \quad B_p \sin\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{12}\ \text{Гс}. \tag{10.5.25}$$

г) Покажите, что гравитационное излучение преобладает в потерях энергии в течение первых 130 лет жизни пульсара.

д) Полная энергия, излучаемая в виде электромагнитных волн, равна

$$\Delta E_{\text{em}} = \int \frac{\beta \Omega^4}{\dot{\Omega}} d\Omega. \tag{10.5.26}$$

Выберите для определенности $\Omega_i = 10^4 \text{с}^{-1}$ и покажите, что

$$\Delta E_{\text{em}} = 5{,}9 \cdot 10^{50}\ \text{эрг}, \tag{10.5.27}$$

в то время как

$$\Delta E_{\text{GW}} = \tfrac{1}{2} I \left(\Omega_i^2 - \Omega_0^2 \right) - \Delta E_{\text{em}} \simeq \tfrac{1}{2} I \Omega_i^2 = 7 \times 10^{52}\ \text{эрг}. \tag{10.5.28}$$

е) Покажите, что в настоящее время

$$\dot{E}_{\text{GW}} = 1{,}4 \cdot 10^{38}\ \text{эрг/с}, \ \dot{E}_{\text{em}} = 5{,}1 \cdot 10^{38}\ \text{эрг/с}$$

в то время как при $\Omega_i = 10^4\ \text{с}^{-1}$

$$\dot{E}_{\text{GW}} = 2{,}9 \cdot 10^{48}\ \text{эрг/с}, \ \dot{E}_{\text{em}} = 3{,}9 \cdot 10^{45}\ \text{эрг/с}$$

в начальный момент.

Упражнение 10.4. Каково значение эксцентричности e и отношения $T/|W|$ для пульсара в Крабовидной туманности в начальный момент, если $\Omega_i = 10^4\ \text{с}^{-1}$? Устойчива ли эта конфигурация? (Примите соотношения для сфероидов Маклорена; сравните с разд. 7.3.)

10.6. ПОКАЗАТЕЛЬ ТОРМОЖЕНИЯ

Для любой степенной модели замедления типа модели магнитного диполя можно записать

$$\dot{\Omega} = -(\text{const}) \cdot \Omega^n, \tag{10.6.1}$$

где параметр n называется *показателем торможения.* Для модели магнитного диполя $n = 3$. В общем случае можно определить

$$n \equiv -\frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}, \tag{10.6.2}$$