так что

$$\rho_{\bar{\nu}} = \frac{(Q - E_e)^2}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}. \tag{11.4.14}$$

Таким образом,

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 C_V^2 (1 + 3a^2)}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \left(E_e^2 - m_e^2 c^4\right)^{1/2} E_e (Q - E_e)^2 \, dE_e. \tag{11.4.15}$$

Определив безразмерные энергии

$$\varepsilon \equiv \frac{E_e}{m_e c^2}, \qquad \varepsilon_0 \equiv \frac{Q}{m_e c^2} = 2{,}5312, \tag{11.4.16}$$

получим

$$d\Gamma = \frac{m_e^5 c^4 G_F^2 C_V^2 (1 + 3a^2)}{2\pi^3 \hbar^7} df, \tag{11.4.17}$$

где энергетический спектр электронов распада возникает из-за фазового множителя

$$df = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2} \varepsilon (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 \, d\varepsilon. \tag{11.4.18}$$

Интегрирование по всему разрешенному диапазону ε от 1 до ε_0 дает

$$f = \frac{1}{60} (\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2} (2\varepsilon_0^4 - 9\varepsilon_0^2 - 8) + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \ln\left[\varepsilon_0 + (\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2}\right] =$$

$$= 1{,}6369, \tag{11.4.19}$$

а отсюда скорость распада нейтрона составляет

$$\Gamma = \frac{m_e^5 c^4 G_F^2 C_V^2 (1 + 3a^2) f}{2\pi^3 \hbar^7} = \frac{1}{972} \text{ с}. \tag{11.4.20}$$

Наблюдаемая скорость равна 1/(925 ± 11) с; расхождение возникает из-за того, что не были учтены кулоновские эффекты при вычислении f (значение f увеличивается примерно до 1,70) и, кроме того, существуют эффекты квантовой электродинамики («радиационные поправки»), дающие еще 2%.

11.5. СКОРОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРКА-ПРОЦЕССОВ

Получив оценку матричного элемента слабого взаимодействия для распада свободного нейтрона, мы имеем теперь возможность вычислить скорость модифицированной урка-реакции (11.2.10). При этом последуем оригинальному подходу Бакала и Вольфа [41].

Пусть нижние индексы 1, 2, 1′, p, e и $\bar{\nu}$ означают два начальных нейтрона, конечный нейтрон, протон, электрон и антинейтрино соответственно. Скорость реакции для заданных начальных состояний 1 и 2 равна

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\delta\left(E_f - E_i\right)|H_{fi}|^2 \rho_p \rho_e \rho_{\bar{\nu}}\, dE_p\, dE_e\, dE_{\bar{\nu}}, \tag{11.5.1}$$

где выражения $|H_{fi}|^2$ надо просуммировать по конечным спинам и усреднить по начальным спинам. Мы явно сохраним нормированный объем $\mathcal{V}$ во всех фазовых множителях и в волновых функциях, так что в пустом пространстве для каждого вида частиц j будем иметь

$$\rho_j\, dE_j \equiv d^3 n_j = \mathcal{V}\frac{d^3 p_j}{h^3}. \tag{11.5.2}$$

Однако реакция происходит в плотном газе, где большинство ячеек фазового пространства с малой энергией занято. Следовательно, каждый множитель $d^3 n_j$ надо умножить на $(1 - f_j)$, где

$$f_j = \frac{1}{\exp\left[\left(E_j - \mu_j\right)/kT\right] + 1} \tag{11.5.3}$$

часть фазового пространства, занятая при энергии E_j (распределение Ферми-Дирака; см. гл. 2). Множители $(1 - f_j)$ уменьшают скорость реакции и называются *блокирующими множителями*.

Обратите внимание, что в использованном в уравнении (11.5.1) «золотом правиле» число фазовых множителей меньше числа конечных частиц на единицу из-за сохранения импульса. Можно получить более симметричное выражение, если добавить множитель

$$\delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\, d^3\mathbf{p}_{1'} = \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\, d^3 n_{1'}\frac{h^3}{\mathcal{V}} = \delta^3\left(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right) d^3 n_{1'}\frac{(2\pi)^3}{\mathcal{V}}.$$

При интегрировании по $\mathbf{p}_{1'}$ этот множитель дает единицу.

Полная светимость, связанная с выходом антинейтрино в объеме $\mathcal{V}$, получается после интегрирования скорости реакции (11.5.1) по всем начальным состояниям, умноженным на $E_{\bar{\nu}}$:

$$L_{\bar{\nu}} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar\mathcal{V}}\int d^3 n_1\, d^3 n_2\, d^3 n_{1'}\, d^3 n_p\, d^3 n_e\, d^3 n_{\bar{\nu}}\, \delta\left(E_f - E_i\right) \times$$

$$\times\, \delta^3\left(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right) S |H_{fi}|^2 E_{\bar{\nu}}. \tag{11.5.4}$$

Здесь

$$S = f_1 f_2 (1 - f_{1'})(1 - f_p)(1 - f_e), \tag{11.5.5}$$

а множители f_1 и f_2 отвечают за распределение начальных состояний.

Упражнение 11.2. Почему в уравнении (11.5.5) нет блокирующего множителя $(1 - f_{\bar{\nu}})$? При каких обстоятельствах следовало бы включить такой множитель?

Важнейший матричный элемент взаимодействия можно записать в виде

$$H_{fi} = \langle n, p, e, \bar{\nu} \,|V_w|\, n, n \rangle, \tag{11.5.6}$$

где V_w — это «контактный» гамильтониан слабого взаимодействия, приводившийся ранее для распада свободного нейтрона [уравнение (11.4.4)]. Теперь он снова подходит для представления лептонов в виде состояний свободных частиц в уравнении (11.5.6). Однако такой способ неприменим в случае нуклонов. Причина в том, что полный гамильтониан нуклона равен

$$H_{\text{nuc}} = H_{\text{free}} + H_s + V_w \equiv H_0 + V_w, \tag{11.5.7}$$

где H_{free} — вклад свободных частиц (кинетическая энергия каждой частицы), а H_s — гамильтониан сильного взаимодействия. Поэтому уравнение (11.5.6) дает лишь самое низшее приближение скорости перехода, если появляющиеся в нем волновые функции нуклонов уже являются собственными функциями H_0. Как уже обсуждалось выше, решение уравнения Шредингера для многих тел, содержащего H_s, далеко не тривиально и пока еще не получено теоретически. Последуем просто за Бакалом и Вольфом и попытаемся оценить влияние H_s на нуклонную волновую функция двух тел.

Запишем поэтому

$$H_{fi} = \int d\mathcal{V}\, d\mathcal{V}'\, \psi^*_{np}(\mathbf{r})\, \psi^*_e(\mathbf{r})\, \psi^*_{\bar{\nu}}(\mathbf{r})\, V_w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \psi_{nn}(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{G_{\text{F}}}{\mathcal{V}} \int d\mathcal{V}\, \psi^*_{np}(\mathbf{r})\, \psi_{nn}(\mathbf{r}). \tag{11.5.8}$$

Мы использовали здесь уравнение (11.4.4) и положили

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}^{1/2}} e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} \to \frac{1}{\mathcal{V}^{1/2}}, \tag{11.5.9}$$

сделав то же самое для $\psi_{\bar{\nu}}$, как и в уравнении (11.4.5).

Предположим, что при взаимодействии в начальном n-n-состоянии доминирует рассеяние s-волны (т.е., $L = 0$)[1]. Тогда n-n-состояние должно иметь полный спин $S = 0$ (сравните с табл. 8.1). Векторная часть (V) слабого взаимодействия связывает это состояние с n-p-состоянием, имеющим

[1] Такое предположение справедливо при низкой плотности $\rho \leqslant \rho_{\text{nuc}}$. В этом предельном случае радиус твердого кора ядерного потенциала r_c много меньше $h/p_f(n)$. Поскольку отклонение волновых функций от состояния, описываемого плоскими волнами, определяется главным образом твердым кором, связанный с актом рассеяния момент количества движения равен $\sim p_f r_c \ll h$, что означает рассеяние s-волны.

$S = 0$, а аксиально-векторная часть (A) связывает его с n-p-состоянием, имеющим $S = 1$. Поэтому [сравните с уравнением (11.4.6)]

$$\sum_{\text{spins}} |H_{fi}|^2 = \frac{4G_F^2}{\mathcal{V}^2}\left(C_V^2|M_V|^2 + 3C_A^2|M_A|^2\right), \tag{11.5.10}$$

где

$$M_V = \int d\mathcal{V}\left(\psi_{np}^0\right)^* \psi_{nn}^0,$$

$$M_A = \int d\mathcal{V}\left(\psi_{np}^1\right)^* \psi_{nn}^0. \tag{11.5.11}$$

Множитель 4 появляется в уравнении (11.5.10), потому что любой из нейтронов пары n-n может стать протоном, что дает множитель 2 для амплитуды и 4 для вероятности.

Поскольку диапазон, в котором проявляется сильное взаимодействие, порядка $\lambda\!\!\!^{-}_\pi = \hbar/m_\pi c$, ожидается, что относительные волновые функции в уравнении (11.5.11) будут перекрываться в сравнительно небольшом объеме порядка $\lambda\!\!\!^{-3}_\pi$. Таким образом, ожидается, что $M \sim \lambda\!\!\!^{-3}_\pi/\mathcal{V}$. Определяя безразмерные матричные элементы

$$\tilde{M}_V = \frac{\mathcal{V}M_V}{\lambda\!\!\!^{-3}_\pi}, \qquad \tilde{M}_A = \frac{\mathcal{V}M_A}{\lambda\!\!\!^{-3}_\pi}, \tag{11.5.12}$$

получим для уравнения (11.5.4)

$$L_{\bar\nu} = 64\pi^4\mathcal{V}G_F^2\hbar^{-1}\lambda\!\!\!^{-}_\pi{}^{-9}\left(C_V^2|\tilde{M}_V|^2 + 3C_A^2|\tilde{M}_A|^2\right)P, \tag{11.5.13}$$

где безразмерный фазовый множитель P равен

$$P = \mathcal{V}^{-6}\lambda\!\!\!^{-}_\pi{}^{15}\int\prod_{j=1}^{6} d^3n_j S E_{\bar\nu}\,\delta^3(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)\,\delta(E_f - E_i). \tag{11.5.14}$$

Отметим, что, поскольку каждый множитель d^3n_j пропорционален $\mathcal{V}$, P не зависит от $\mathcal{V}$ и поэтому величина $L_{\bar\nu}$ пропорциональна $\mathcal{V}$. Для антинейтринной излучательной способности $\varepsilon_{\bar\nu}$ имеем следующее выражение:

$$\varepsilon_{\bar\nu} \equiv \frac{L_{\bar\nu}}{\mathcal{V}} = 5{,}1\cdot 10^{48}P\left(|\tilde{M}_V|^2 + 4{,}7|\tilde{M}_A|^2\right)\ \text{эрг/(см}^3\cdot\text{с)}. \tag{11.5.15}$$

Фазовый множитель подсчитан в приложении E; там показано, что он равен

$$P \simeq 2{,}1\cdot 10^{-30}\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{nuc}}}\right)^2 T_9^8, \tag{11.5.16}$$

где $\rho_{\text{nuc}} = 2{,}8\cdot 10^{14}$ г/см^3, а T_9 — температура, выраженная в единицах 10^9 K. Заметим, что температурная зависимость $\varepsilon_{\bar\nu}$ целиком связана с фазовым множителем; такой результат, как правило, справедлив для реакций охлаждения с участием нейтрино. Восьмая степень температуры T возникает следующим образом: для каждого вида вырожденных частиц только доля порядка kT/E_F может вносить эффективный вклад в скорость охлаждения. Есть два таких начальных вида и три конечных. Фазовый объем антинейтрино пропорционален $E_{\bar{\nu}}^2$, а скорость потерь энергии дает еще один множитель $E_{\bar{\nu}}$. Поскольку $E_{\bar{\nu}} \sim kT$, имеем всего восемь степеней T.

Оценка безразмерного матричного элемента не столь проста. Можно определить фундаментальный масштаб длины из импульса Ферми доминирующих нейтронов с помощью выражения

$$l = \frac{\hbar}{p_{\mathrm{F}}(n)} \sim 0{,}4\lambda_\pi \left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{nuc}}}\right)^{-1/3}. \tag{11.5.17}$$

Бакал и Вольф предположили, что матричные элементы $\tilde{M}_V$ и $\tilde{M}_A$, как можно ожидать, пропорциональны $(l/\lambda_\pi)^3$, т.е. должны быть порядка единицы при $\rho \sim \rho_{\mathrm{nuc}}$ и медленно уменьшаться, как $1/\rho$. Во всяком случае, они использовали некоторые результаты расчетов, выполненных для ядерного вещества, чтобы формально вычислить

$$|\tilde{M}_A|^2 = |\tilde{M}_V|^2 \simeq 1{,}0\left(\frac{\rho_{\mathrm{nuc}}}{\rho}\right)^{4/3}. \tag{11.5.18}$$

Тогда уравнение (11.5.11) принимает вид

$$\varepsilon_{\bar{\nu}} = 6{,}1 \cdot 10^{19} \left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{nuc}}}\right)^{2/3} T_9^8 \quad \text{эрг/(см}^3 \cdot \text{с)}. \tag{11.5.19}$$

К выражению (11.5.19) нам надо теперь добавить скорость потерь энергии *нейтрино,* обусловленных «обратной» реакцией (11.2.11). Благодаря инвариантности относительно изменения направления времени матричные элементы M_A и M_V для реакции (11.2.11) являются комплексно-сопряженными элементами M_A и M_V для реакции (11.2.10). Поскольку фазовые множители одни и те же для обеих реакций (с учетом сделанного предположения о пренебрежении всеми импульсами лептонов), обе реакции дают *одну и ту же* скорость потерь энергии.

Реакции с излучением мюонного нейтрино (11.2.12) и (11.2.13) должны рассматриваться, когда $\mu_e > m_\mu c^2$ (т.е. $\rho > 2{,}9\rho_{\mathrm{nuc}}$ в модели свободных частиц; сравните с разд. 8.10). Реакции с ν_μ отличаются от реакций с ν_e только фазовым множителем P, где вместо $p_e^2 dp_e$ появляется $p_\mu^2 dp_\mu$. Поэтому отношение скорости потерь энергии для мюонных и электронных нейтрино равно

$$F = \frac{p_\mu^2\, dp_\mu}{p_e^2\, dp_e}. \tag{11.5.20}$$

Каждый из членов уравнения (11.5.20) следует вычислять на поверхности Ферми, поскольку только эта область фазового объема обеспечивает вклад в скорость реакции.

Упражнение 11.3. Используйте уравнение равновесия $E_F(\mu) = E_F(e)$ и покажите, что $p_\mu dp_\mu = p_e dp_e$ на соответствующих поверхностях Ферми, так что

$$F = \begin{cases} 0, & \rho \lesssim 2{,}9\rho_{\text{nuc}} \\ \left[1 - \left(\dfrac{m_\mu c^2}{E_F(e)}\right)^2\right]^{1/2}, & \rho \gtrsim 2{,}9\rho_{\text{nuc}} \end{cases} \tag{11.5.21}$$

Умножение уравнения (11.5.19) на $2(1 + F)$ дает в конечном итоге полную скорость потерь энергии благодаря модифицированным урка-реакциям[1]:

$$\varepsilon_\nu^{\text{URCA}} = 1{,}2 \cdot 10^{20} \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{nuc}}}\right)^{2/3} T_9^8 (1 + F) \text{ эрг/(см}^3 \cdot \text{с)}. \tag{11.5.22}$$

Это дает светимость нейтронной звезды с массой M и однородной плотностью ρ

$$L_\nu^{\text{URCA}} = 8{,}5 \cdot 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho}\right)^{1/3} T_9^8 (1 + F) \text{ эрг/с}. \tag{11.5.23}$$

Недавно Фримен и Максвелл [211] повторили приведенные выше расчеты, использовав более реалистичное выражение для сильного NN-взаимодействия. Они получили такую же зависимость от плотности, но численный коэффициент в уравнении (11.5.22) у них равен $7{,}4 \cdot 10^{20}$, что почти на порядок величины больше. Для звезды с однородной плотностью без учета мюонов это дает

$$L_\nu^{\text{URCA}} = 5{,}3 \cdot 10^{39} \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho}\right)^{1/3} T_9^8 \text{ эрг/с}. \tag{11.5.24}$$

11.6. СКОРОСТИ ДРУГИХ РЕАКЦИЙ

Обрисовав вывод соотношения (11.5.22), обсудим теперь кратко скорости других возможных реакций охлаждения.

а) Тормозное излучение нуклонной пары

Наиболее существенный из других механизмов охлаждения, который становится возможным при учете нейтральных токов, — это тормозное излучение нуклонной пары

$$n + n \to n + n + \nu + \bar{\nu}, \qquad n + p \to n + p + \nu + \bar{\nu}. \tag{11.6.1}$$

[1] Наши численные результаты слегка отличаются от полученных Бакалом и Вольфом [41] из-за разных значений для ρ_{nuc} и для константы связи бета-распада.