

12.4. ДВИЖЕНИЕ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ

Чтобы исследовать геометрию Шварцшильда дальше, рассмотрим движение свободно движущейся пробной частицы. Вспомним [см. уравнение (5.2.21)], что такие частицы движутся вдоль геодезических пространства-времени, а уравнение геодезических можно вывести из лагранжиана

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \quad (12.4.1)$$

где $t \equiv dt/d\lambda = p^t$ — t -компонента 4-импульса и т.д. Мы выбрали параметр λ таким образом, чтобы удовлетворить соотношению $\lambda = \tau/m$ для частицы с массой m .

Уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad x^\alpha = (t, r, \theta, \phi). \quad (12.4.2)$$

Для θ , ϕ и t они выглядят соответственно

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \quad (12.4.3)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0, \quad (12.4.4)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (12.4.5)$$

Вместо того, чтобы непосредственно использовать уравнение для r -координаты, проще воспользоваться тем фактом, что

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -m^2. \quad (12.4.6)$$

Итак, величина L в уравнении (12.4.1) равна $-m^2/2$.

Теперь уравнение (12.4.3) показывает, что если ориентировать систему координат таким образом, чтобы вначале частица двигалась в экваториальной плоскости (т.е. $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$), то частица останется в экваториальной плоскости. Этот результат следует из теоремы единственности решения таких дифференциальных уравнений, поскольку $\theta = \pi/2$ для всех значений λ удовлетворяет уравнению. Физически этот результат очевиден, если учесть соображения сферической симметрии.

При $\theta = \pi/2$ уравнения (12.4.4) и (12.4.5) принимают вид

$$p_\phi \equiv r^2 \dot{\phi} = \text{const} \equiv l, \quad (12.4.7)$$

$$-p_t \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = \text{const} \equiv E. \quad (12.4.8)$$

Это просто интегралы движения, соответствующие циклическим координатам уравнения (12.4.1) (см. разд. 5.2). Чтобы понять их физический смысл, рассмотрим измерение энергии частицы, выполняемое статическим наблюдателем в экваториальной плоскости. Эта локально измеряемая энергия представляет собой временной компонент 4-импульса, измеренного в локальной ортонормальной системе, т.е. проекцию 4-импульса на базисный временной вектор:

$$\begin{aligned} E_{\text{local}} &\equiv p^{\hat{t}} = -p_{\hat{t}} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p_t, \end{aligned}$$

т.е.

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} E_{\text{local}}. \quad (12.4.9)$$

При $r \rightarrow \infty$ получаем $E_{\text{local}} \rightarrow E$, поэтому сохраняющаяся величина E называется «энергией на бесконечности». Она связана с E_{local} множителем, определяющим красное смещение.

Упражнение 12.2. Для альтернативного вывода формулы красного смещения используйте тот факт, что энергия E постоянна вдоль траектории фотона, и покажите, что

$$\frac{\nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} = \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{em}}}\right)^{-1/2} \quad (12.4.10)$$

для статического излучателя при $r = r_{\text{em}}$ и приемника, расположенного на бесконечности. Объясните, почему горизонт событий для шварцшильдовской черной дыры иногда называют «поверхностью бесконечного красного смещения».

Физическая интерпретация l следует из рассмотрения локально измеряемой величины $v^{\hat{\phi}}$ — тангенциального компонента скорости

$$v^{\hat{\phi}} = \frac{p^{\hat{\phi}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{\phi}}}{p_{\hat{t}}} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}}}{E_{\text{local}}} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}}/r}{E_{\text{local}}} = \frac{p_{\phi}/r}{E_{\text{local}}},$$

и поэтому

$$l = E_{\text{local}} r v^{\hat{\phi}}. \quad (12.4.11)$$

Сравнивая с ньютоновским выражением $mv^{\hat{\phi}}r$, видим, что l — это сохраняющийся момент количества движения частицы.

Рассмотрим теперь отдельно случаи: $m \neq 0$ и $m = 0$. Для частиц с ненулевой массой покоя удобно перенормировать E и l к величинам, отнесенным к единице массы. Определим

$$\tilde{E} = \frac{E}{m}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{m}. \quad (12.4.12)$$

Затем, вспомнив, что $\lambda = \tau/m$, найдем из уравнений (12.4.6)—(12.4.8)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right), \quad (12.4.13)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}}{r^2}, \quad (12.4.14)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - 2M/r}. \quad (12.4.15)$$

Уравнение (12.4.13) можно решить в виде $r = r(\tau)$ (в общем виде это эллиптический интеграл), затем уравнение (12.4.14) дает $\phi(\tau)$, а уравнение (12.4.15)— $t(\tau)$.

Интересно рассмотреть орбиты, лежащие слегка над горизонтом событий. Локально измеряемая величина $v^{\hat{r}}$ — радиального компонента скорости — определяется выражением

$$v^{\hat{r}} = \frac{p^{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{r}}}{E_{\text{local}}} = \frac{p_r(1 - 2M/r)^{1/2}}{E_{\text{local}}} = \frac{p^r}{E}, \quad (12.4.16)$$

вытекающим из уравнений (12.3.4) и (12.4.9). Вспомня, что $p^r \equiv mdr/d\tau$ и принимая во внимание уравнение (12.4.13), получим

$$v^{\hat{r}} = \frac{dr}{\tilde{E} d\tau} = \left[1 - \frac{1}{\tilde{E}^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (12.4.17)$$

Таким образом, при $r \rightarrow 2M$ находим $v^{\hat{r}} \rightarrow 1$, т.е. частица с точки зрения локального статического наблюдателя, расположенного в точке с координатой r , приближается к горизонту событий вдоль радиальной геодезической со скоростью света (независимо от значений \tilde{l}).

Упражнение 12.3. Покажите, что тот же самый наблюдатель (находящийся в точке с координатой r) обнаружит, что тангенциальная скорость частицы удовлетворяет соотношению

$$v^{\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{\tilde{l}}{r\tilde{E}}, \quad (12.4.18)$$

так что $v^{\hat{\phi}} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 2M$.

Упражнение 12.4. а) Покажите из уравнения (12.4.17), что локальный наблюдатель, находящийся в точке с координатой r , обнаружит у частицы, свободно падающей радиально из состояния покоя на бесконечности, скорость

$$v^{\hat{r}} = \left(\frac{2m}{r} \right)^{1/2}, \quad (12.4.19)$$

которая имеет точно такой же вид, что и ньютоновская скорость.

б) Получите такой же результат из уравнения (12.4.9), отметив, что $E_{\text{local}} \equiv \gamma m$.

Упражнение 12.5. Частица перемещается вдоль геодезической от точки (r, ϕ) до $(r + dr, \phi + d\phi)$ за время dt . Локальный статический наблюдатель, находящийся в (r, ϕ) , измеряет собственную длину траектории частицы, которую приходится умножить на $ds(t, \theta, \phi = \text{const}) = g_{rr}^{1/2} dr (= d\hat{r})$ и $ds(t, r, \theta = \text{const}) = g_{\phi\phi}^{1/2} d\phi (= d\hat{\phi})$ соответственно для направлений перемещения по r и ϕ за это время; собственное время этого движения, измеренное по часам наблюдателя, составляет $[-ds^2(r, \theta, \phi = \text{const})]^{1/2} = (-g_{00})^{1/2} dt (= d\hat{t})$. [Обратите внимание, что $d\hat{t}$ для наблюдателя не равно величине $d\tau$, появляющейся, например, в уравнениях (12.4.13)—(12.4.15) для частицы!] Используйте выражения для этих измерений совместно с уравнениями (12.4.13)—(12.4.15), чтобы вывести заново уравнения (12.4.17) и (12.4.18).

Простейшими геодезическими являются те, которые соответствуют радиальному падению, т.е. $\phi = \text{const}$. Это соотношение выполняется, если $\tilde{\Gamma} = 0$ и уравнение (12.4.13) принимает вид

$$\frac{dr}{d\tau} = - \left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (12.4.20)$$

Рассматривая для уравнения (12.4.20) предел $r \rightarrow \infty$, мы видим, что возможны три случая: а) $\tilde{E} < 1$, частица падает из состояния покоя при, скажем, $r = R$; б) $\tilde{E} = 1$, частица падает из состояния покоя на бесконечности; в) $\tilde{E} > 1$, падающая частица на бесконечности имела конечную, направленную внутрь скорость $v = v_\infty$.

Упражнение 12.6. а) Проинтегрируйте уравнение (12.4.20) для случая $\tilde{E} < 1$, т.е. $1 - \tilde{E}^2 = 2M/R$, и получите ($\tau = 0$ при $r = R$)

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M} \right)^{1/2} \left[2 \left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} + \arccos \left(\frac{2r}{R} - 1 \right) \right]. \quad (12.4.21)$$

б) Введите «параметр циклоиды» η , исходя из уравнения

$$r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta), \quad (12.4.22)$$

и покажите, что

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta). \quad (12.4.23)$$

в) Проинтегрируйте уравнение (12.4.15) по времени в единицах η и получите ($t = 0$ при $r = R$)

$$\frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{(R/2M - 1)^{1/2} + \operatorname{tg}(\eta/2)}{(R/2M - 1)^{1/2} - \operatorname{tg}(\eta/2)} \right| + \left(\frac{R}{2M} - 1 \right)^{1/2} \left[\eta + \frac{R}{4M} (\eta + \sin \eta) \right]. \quad (12.4.24)$$

Отметим следующие важные результаты для случая радиального падения: из уравнения (12.4.21) следует, что *собственное время* падения из состояния покоя при $r = R > 2M$ в точку $r = 2M$ *конечно*. Собственное время падения в точку $r = 0$ равно $\pi(R^3/8M)^{1/2}$; оно тоже конечно. Тем не менее из уравнений (12.4.23) и (12.4.24) следует, что *координатное время* (собственное время наблюдателя, находящегося на бесконечности) падения в точку $r = 2M$ *бесконечно* [при $r = 2M$ получаем $\operatorname{tg}(\eta/2) = (R/2M - 1)^{1/2}$]. Эти результаты отражены на рис. 12.1.

Упражнение 12.7. а) Найдите $\tau(r)$ и $t(r)$ для радиального падения при $\tilde{E} = 1$.

б) Найдите $\tau(r)$, $r(\eta)$, $\tau(\eta)$ и $t(\eta)$ при $\tilde{E} > 1$. Эти величины можно получить из уравнений (12.4.21)–(12.4.24), так определив R , чтобы $2M/R = \tilde{E}^2 - 1$, и изменив знак R в этих уравнениях. Покажите, что $2M/R = v_\infty^2/(1 - v_\infty^2)$.

Ответ: См. [366], стр. 407.

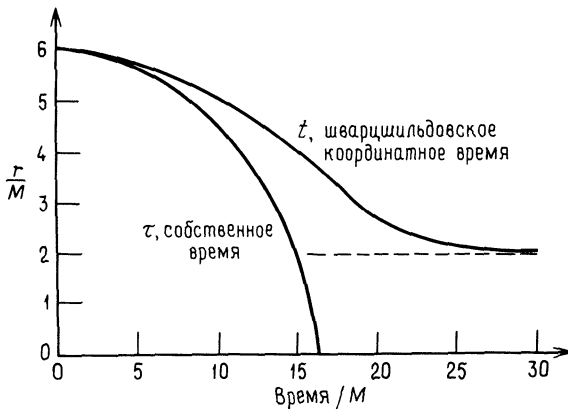


Рис. 12.1. Падение из состояния покоя на шварцшильдовскую черную дыру с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с частицей (собственное время τ), и удаленного наблюдателя (координатное время Шварцшильда t). С точки зрения первого наблюдателя точка $r = 0$ достигается достаточно быстро [см. уравнение (12.4.23)]. Для удаленного наблюдателя точка $r = 0$ никогда не достигается и даже приближение к $r = 2M$ является асимптотическим [уравнение (12.4.24) [411].

Перейдем теперь к нерадиальному движению. Получаемые из уравнений (12.4.13)—(12.4.15) эллиптические интегралы трудно интерпретировать, но мы можем получить общую картину орбит, рассматривая «эффективный потенциал»

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right). \quad (12.4.25)$$

Тогда уравнение (12.4.13) принимает вид

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - V(r). \quad (12.4.26)$$

Для фиксированного значения \tilde{l} потенциал V изображен схематически на рис. 12.2. На диаграмме приведены также три горизонтальные линии, соответствующие разным значениям \tilde{E}^2 . Из уравнения (12.4.26) следует, что расстояние между горизонтальной линией и графиком V дает значение $(dr/d\tau)^2$. Рассмотрим орбиту 1: горизонтальная линия с меткой 1 соответствует частице, пришедшей из бесконечности с энергией \tilde{E}^2 . Когда частица достигает радиуса, соответствующего точке A , $dr/d\tau$ проходит через нуль и изменяет знак, т.е. частица возвращается на бесконечность. Такая орбита называется *несвязанной*, а точка A называется *точкой поворота*. Орбита 2 соответствует *захвату*: частица погружается в черную дыру. Орбита 3 — это *связанная* орбита с двумя точками поворота A_1 и A_2 .

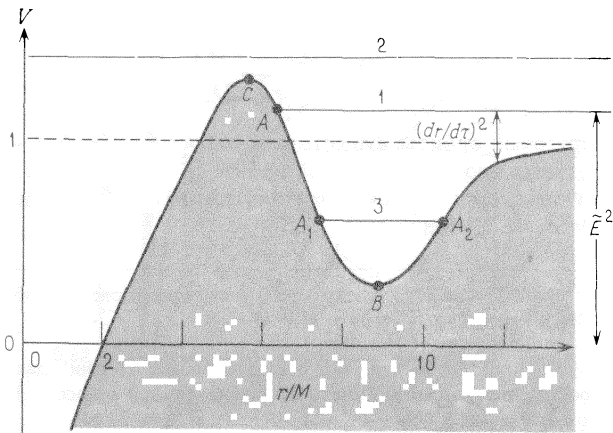


Рис. 12.2. Профиль эффективного потенциала для частицы с ненулевой массой покоя, движущейся по орбите относительно шварцшильдовской черной дыры с массой M . Три горизонтальные линии с разными значениями \tilde{E}^2 соответствуют несвязанным орбитам (1), орбитам захвата (2) и связанным орбитам (3). Детали поясняются в тексте.

Точка B соответствует *устойчивой круговой орбите*. Если движение частицы будет слегка возмущено, орбита останется близкой к точке B . Точка C соответствует *неустойчивой круговой орбите*: помещенная на такую орбиту частица, получив малейшее возмущение, направленное внутрь по радиусу, будет захвачена черной дырой. Если она получит возмущение, направленное наружу, то улетит на бесконечность. Орбиты, похожие на 1 и 3, рассматриваются и в ньютоновском случае движения в центральном гравитационном поле, однако орбиты захвата существуют лишь в общей теории относительности.

Упражнение 12.8. Покажите, что уравнение (12.4.26) сводится к привычному ньютоновскому выражению для движения частицы в центральном гравитационном поле, когда $2M/r \ll 1$.

Упражнение 12.9. а) Покажите, что $\partial V/\partial r = 0$, когда

$$Mr^2 - \tilde{l}^2 r + 3M\tilde{l}^2 = 0, \quad (12.4.27)$$

и, следовательно, для V нет ни максимума, ни минимума при $\tilde{l} < 2\sqrt{3} M$.

б) Покажите, что $V_{\max} = 1$ при $\tilde{l} = 4M$.

Зависимость V от r для разных \tilde{l} показана на рис. 12.3.

Круговые орбиты существуют, если $\partial V/\partial r = 0$ и $dr/d\tau = 0$. Уравнения (12.4.26) и (12.4.27) дают

$$\tilde{l}^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M}, \quad (12.4.28)$$

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)}. \quad (12.4.29)$$

Поэтому круговые орбиты существуют только до $r = 3M$ — предельного случая, соответствующего фотонной орбите ($\tilde{E} = E/m \rightarrow \infty$). Круговые орбиты устойчивы, если график V вогнут, т.е. $\partial^2 V/\partial r^2 > 0$, и неустойчивы, если $\partial^2 V/\partial r^2 < 0$. (Почему?)

Упражнение 12.10. Покажите, что круговые шварцшильдовские орбиты устойчивы, если $r > 6M$, и неустойчивы, если $r < 6M$.

Упражнение 12.11. а) Покажите, что в ньютоновской теории удаленная нерелятивистская пробная частица может быть захвачена звездой с массой M и радиусом R , если только

$$\tilde{l} < \tilde{l}_{\text{crit}} \approx (2MR)^{1/2}.$$

б) Принимая во внимание эффекты общей теории относительности, ответьте, могут ли частицы с гораздо большими значениями момента количества движения захватываться нейтронными звездами? Белыми карликами?

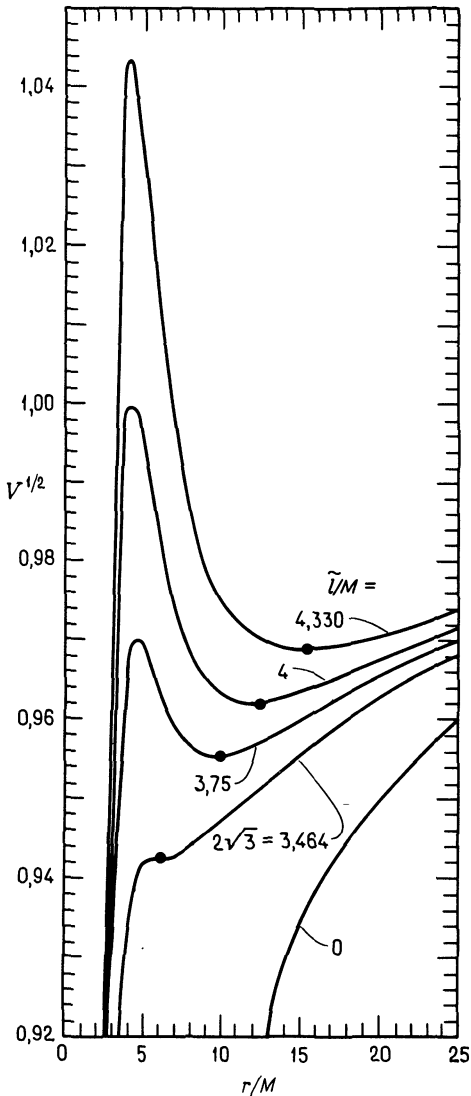


Рис. 12.3. Профиль эффективного потенциала для частиц с ненулевой массой покоя и различными значениями момента количества движения \tilde{l} , движущихся по орбите относительно шварцшильдской черной дыры с массой M . Точки локальных минимумов соответствуют радиусам устойчивых круговых орбит. Такие орбиты существуют только для $\tilde{l} > 2\sqrt{3}M$ [411].

Энергия связи, приходящаяся на единицу массы частицы, которая находится на крайней устойчивой орбите с $r = 6M$, в соответствии с уравнением (12.4.29) составляет

$$\tilde{E}_{\text{binding}} = \frac{m - E}{m} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} = 5,72\%. \quad (12.4.30)$$

Это доля энергии покоя, выделяющаяся, скажем, когда покоившаяся на бесконечности частица медленно приближается по спирали к самой внутренней устойчивой круговой орбите, а затем круто падает на черную дыру. Таким образом, преобразование массы покоя в другие формы энергии при аккреции на черную дыру оказывается потенциально гораздо более эффективным, чем при ядерном «сгорании», когда высвобождается максимум 0,9% энергии—массы покоя ($\text{H} \rightarrow \text{Fe}$). Это обстоятельство будет важным для обсуждения аккреционных дисков вокруг черных дыр (см. разд. 14.5). Высокая эффективность механизма аккреции служит основой для привлечения черных дыр в качестве источников энергии в многочисленных моделях, объясняющих астрономические наблюдения огромного энерговыделения из компактных областей (например, Суг X-1, квазары, двойные радиогалактики и т.п.).

Упражнение 12.12. а) Используйте уравнение (12.4.18) и покажите, что скорость частицы на самой внутренней устойчивой круговой орбите, измеренная локальным статическим наблюдателем, равна $v^\phi = 1/2$ ($c = 1$).

б) Предположим, что эта частица испускает монохроматический свет, частота которого в системе координат, связанной с частицей, равна ν_{em} . Покажите, что измеряемая на бесконечности частота периодически изменяется в пределах

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \nu_{\text{em}} < \nu_\infty < \sqrt{2} \nu_{\text{em}}.$$

Указание: Запишите $\nu_\infty/\nu_{\text{em}} = (\nu_\infty/\nu_{\text{stat}})(\nu_{\text{stat}}/\nu_{\text{em}})$, где ν_{stat} — частота, измеряемая локальным статическим наблюдателем и связанная с ν_{em} формулой Доплера из специальной теории относительности.

в) Вычислите орбитальный период частицы, измеряемый локальным статическим наблюдателем и наблюдателем на бесконечности.

Указание: Поскольку $d\hat{\phi} = r d\phi$, собственная длина окружности орбиты равна просто $2\pi r$.

$$\text{Ответ: } T_{\text{stat}} = 24\pi M, T_\infty = T_{\text{stat}}/(2/3)^{1/2} = 4,5 \cdot 10^{-4} (M/M_\odot)\text{с}.$$

Упражнение 12.13. а) Покажите, что измеряемая на бесконечности угловая скорость $\Omega \equiv d\hat{\phi}/dt$ имеет такой же вид в геометрии Шварцшильда, как и для круговых орбит в ньютоновской геометрии, а именно

$$\Omega = \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2}. \quad (12.4.31)$$

б) Используйте этот результат для подтверждения значения T_∞ , найденного в упражнении 12.12.

Для последующего обсуждения аккреции на черную дыру нам понадобится знать сечение захвата частиц, падающих на дыру из бесконечности. Оно просто равно

$$\sigma_{\text{сарт}} = \pi b_{\text{max}}^2, \quad (12.4.32)$$

где b_{max} максимальный прицельный параметр захватываемой частицы. Чтобы выразить b в единицах E и \tilde{l} , рассмотрим определение прицельного параметра (рис. 12.4):

$$b = \lim_{r \rightarrow \infty} r \sin \phi. \quad (12.4.33)$$

При $r \rightarrow \infty$ уравнения (12.4.13) и (12.4.14) дают

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \approx \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{l}^2}. \quad (12.4.34)$$

Подстановкой $r = b/\phi$ определяется соотношение

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\tilde{E} - 1}{\tilde{l}^2}, \quad (12.4.35)$$

или в единицах скорости на бесконечности $\tilde{E} = (1 - v_\infty^2)^{-1/2}$.

$$\tilde{l} = b v_\infty (1 - v_\infty^2)^{-1/2} \rightarrow b v_\infty \quad \text{для } v_\infty \ll 1. \quad (12.4.36)$$

Рассмотрим теперь нерелятивистскую частицу, движущуюся к черной дыре ($\tilde{E} \approx 1$, $v_\infty \ll 1$). Из упражнения 12.9 известно, что она захватывается, если $l < 4M$. Таким образом,

$$b_{\text{max}} = \frac{4M}{v_\infty}, \quad (12.4.37)$$

что дает сечение захвата

$$\sigma_{\text{сарт}} = \frac{4\pi(2M)^2}{v_\infty^2}. \quad (12.4.38)$$

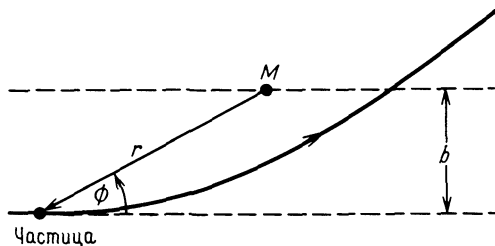


Рис. 12.4. Прицельный параметр b частицы с траекторией $r = r(\phi)$ движения относительно массы M .

Эту величину следует сравнить с сечением захвата частиц сферой радиусом R в ньютоновской теории:

$$\sigma_{\text{Newt}} = \pi R^2 \left(1 + \frac{2M}{v_{\infty}^2 R} \right). \quad (12.4.39)$$

Итак, черная дыра захватывает нерелятивистские частицы как ньютоновская сфера радиусом $R = 8M$.

12.5. ОРБИТЫ БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ В ГЕОМЕТРИИ ШВАРЦШИЛЬДА

При $m = 0$ (например, для фотона) уравнения (12.4.6)—(12.4.8) принимают вид

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - 2M/r}, \quad (12.5.1)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2}, \quad (12.5.2)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (12.5.3)$$

Согласно принципу эквивалентности, мировые линии частиц не должны зависеть от их энергии. Это можно увидеть, если ввести новый параметр

$$\lambda_{\text{new}} = l\lambda. \quad (12.5.4)$$

Записав

$$b \equiv \frac{l}{E} \quad (12.5.5)$$

и опустив индекс «new», найдем

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b(1 - 2M/r)}, \quad (12.5.6)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \quad (12.5.7)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (12.5.8)$$

Мировая линия зависит только от параметра b , представляющего собой *прицельный параметр* частицы, а не от l и E по отдельности. Переходя в уравнении (12.4.35) к пределу $m \rightarrow 0$, видим, что величина b в выражении