Эту величину следует сравнить с сечением захвата частиц сферой радиусом R в ньютоновской теории:

$$\sigma_{\text{Newt}} = \pi R^2\left(1 + \frac{2M}{v_\infty^2 R}\right). \tag{12.4.39}$$

Итак, черная дыра захватывает нерелятивистские частицы как ньютоновская сфера радиусом $R = 8M$.

12.5. ОРБИТЫ БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ В ГЕОМЕТРИИ ШВАРЦШИЛЬДА

При $m = 0$ (например, для фотона) уравнения (12.4.6)—(12.4.8) принимают вид

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - 2M/r}, \tag{12.5.1}$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2}, \tag{12.5.2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{12.5.3}$$

Согласно принципу эквивалентности, мировые линии частиц не должны зависеть от их энергии. Это можно увидеть, если ввести новый параметр

$$\lambda_{\text{new}} = l\lambda. \tag{12.5.4}$$

Записав

$$b \equiv \frac{l}{E} \tag{12.5.5}$$

и опустив индекс «new», найдем

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b(1 - 2M/r)}, \tag{12.5.6}$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \tag{12.5.7}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{12.5.8}$$

Мировая линия зависит только от параметра b, представляющего собой *прицельный параметр* частицы, а не от l и E по отдельности. Переходя в уравнении (12.4.35) к пределу $m \to 0$, видим, что величина b в выражении

(12.5.5) аналогична такой же величине, выведенной в предыдущем разделе для частиц с массой.

Представление об орбитах фотонов можно получить, если исходить из эффективного потенциала

$$V_{\text{phot}} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \tag{12.5.9}$$

так что уравнение (12.5.8) примет вид

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - V_{\text{phot}}(r). \tag{12.5.10}$$

Ясно, что расстояние от горизонтальной линии высотой $1/b^2$ до кривой V_{phot} дает $(dr/d\lambda)^2$. Величина V_{phot} имеет максимум $1/(27\,M^2)$ при $r = 3\,M$. Это показано на рис. 12.5. Видно, что критический прицельный параметр, разделяющий орбиты захвата и рассеяния, определяется выражением $1/b^2 = 1/(27\,M^2)$, или

$$b_c = 3\sqrt{3}\,M. \tag{12.5.11}$$

Таким образом, сечение захвата падающих из бесконечности фотонов равно

$$\sigma_{\text{phot}} = \pi b_c^2 = 27\pi M^2. \tag{12.5.12}$$

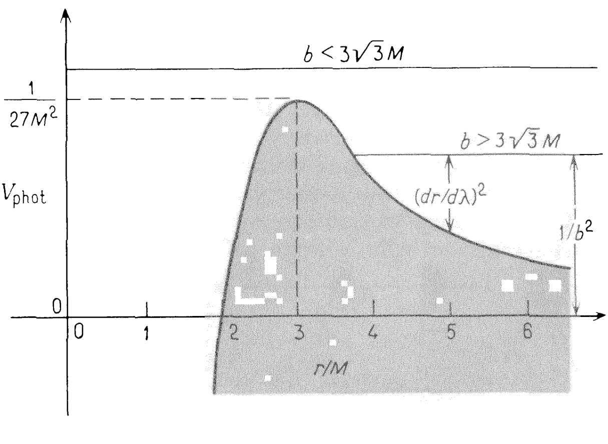


Рис. 12.5. Профиль эффективного потенциала для частицы с *нулевой* массой покоя, движущейся по орбите относительно шварцшильдовской черной дыры с массой M. Если частица падает с расстояния $r = \infty$ с прицельным параметром $b > 3\sqrt{3}M$, она рассеивается назад в бесконечность. Однако если $b < 3\sqrt{3}M$, частица захватывается черной дырой.

Чтобы рассчитать наблюдаемое излучение газа вблизи черной дыры, надо знать те направления движения, измеряемые статическим наблюдателем, для которых фотон, излученный при радиусе r, может ускользнуть на бесконечность. Обратившись к рис. 12.5, мы видим, что при $r \geqslant 3M$ фотон выйдет наружу, если только $v^{\hat{r}} > 0$ или же $v^{\hat{r}} < 0$ и $b > 3\sqrt{3}\,M$. Если ввести угол ψ между направлением движения и радиусом (рис. 12.6), то имеем (поскольку $|\mathbf{v}| = 1$)

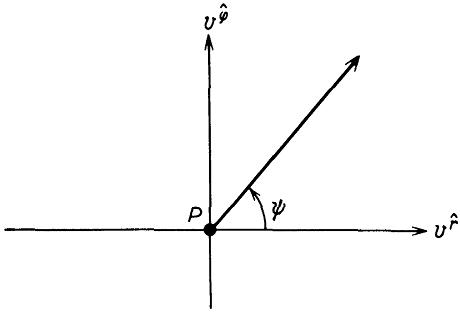
$$v^{\hat{\phi}} = \sin\psi, \qquad v^{\hat{r}} = \cos\psi. \tag{12.5.13}$$

Но уравнения (12.4.12) и (12.4.18) дают при $b = l/E$

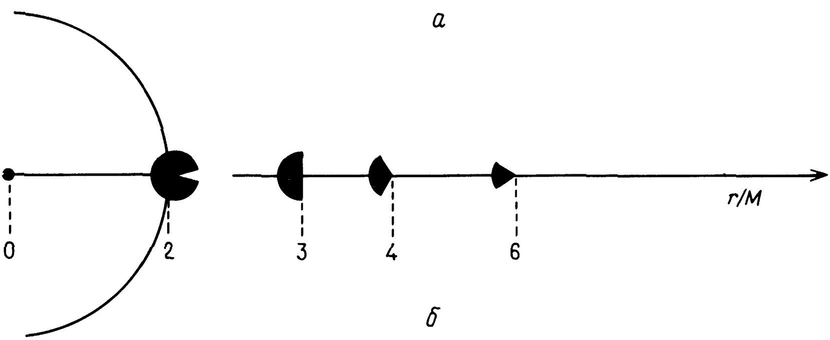
$$v^{\hat{\phi}} = \frac{b}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \tag{12.5.14}$$

Таким образом, движущийся в направлении черной дыры фотон ускользнет от нее, если

$$\sin\psi > \frac{3\sqrt{3}\,M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \tag{12.5.15}$$



а



б

Рис. 12.6. а) Угол ψ между направлением распространения фотона и радиальным направлением в данной точке P. *б*) Гравитационный захват излучения шварцшильдовской черной дырой. Лучи, испускаемые из каждой точки внутрь затушеванной конической полости, захватываются. Показаны полости захвата, измеренные в ортонормальной системе отсчета локальным статическим наблюдателем.

При $r = 6\,M$ для ускользания требуется $\psi < 135°$, при $r = 3\,M$ получаем $\psi < 90°$, так что все распространяющиеся внутрь фотоны будут захвачены (т.е. 50% излучения стационарного изотропного излучателя, расположенного при $r = 3\,M$, захватывается черной дырой).

Упражнение 12.14. Покажите, что вылетевший наружу фотон, излученный между $r = 2\,M$ и $r = 3\,M$, ускользнет от захвата при условии

$$\sin\psi < \frac{3\sqrt{3}\,M}{r}\left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)^{1/2}.$$

Когда источник приближается к $r = 2\,M$, ускользают только те фотоны, которые испускаются наружу строго по радиусу. (См. рис. 12.6, где показана диаграмма этих эффектов.)

12.6. «НЕСИНГУЛЯРНОСТЬ» РАДИУСА ШВАРЦШИЛЬДА

Метрика (12.3.1) кажется сингулярной при $r = 2\,M$: коэффициент при dt^2 стремится к нулю, а коэффициент при dr^2 становится бесконечным. Однако нельзя сразу же заключать, что такое поведение представляет собой истинную физическую сингулярность. Действительно, коэффициент при $d\phi^2$ обращается в нуль при $\theta = 0$, но мы знаем, что это происходит просто потому, что сама система полярных координат имеет здесь особенность. Координатную особенность при $\theta = 0$ можно исключить выбором новой системы координат (например, стереографических координат на 2-сфере).

Мы уже догадывались о том, что радиус Шварцшильда $r = 2\,M$ является лишь *координатной сингулярностью*. Вспомним, что при радиальном падении частицы не отмечается ничего странного в точке $r = 2\,M$; нет ничего особого и в поведении $r(\tau)$ в этой точке. Однако координатное время t становится бесконечным при $r = 2\,M$. Это дает веские основания предполагать наличие координатной, а не физической сингулярности.

Есть много разных преобразований координат, которые можно использовать для убедительного доказательства, что $r = 2\,M$ не является физической сингулярностью. Мы продемонстрируем одно из них — *систему координат Крускала* [320, 555]. Она определяется преобразованием

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M}\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{4M}, \tag{12.6.1}$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{4M}. \tag{12.6.2}$$

Обратное преобразование задается формулами

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M} = u^2 - v^2, \tag{12.6.3}$$

$$\mathrm{th}\,\frac{t}{4M} = \frac{v}{u}. \tag{12.6.4}$$