

При $r = 6M$ для ускользания требуется $\psi < 135^\circ$, при $r = 3M$ получаем $\psi < 90^\circ$, так что все распространяющиеся внутрь фотоны будут захвачены (т.е. 50% излучения стационарного изотропного излучателя, расположенного при $r = 3M$, захватывается черной дырой).

Упражнение 12.14. Покажите, что вылетевший наружу фотон, излученный между $r = 2M$ и $r = 3M$, ускользнет от захвата при условии

$$\sin \psi < \frac{3\sqrt{3}M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}.$$

Когда источник приближается к $r = 2M$, ускользают только те фотоны, которые испускаются наружу строго по радиусу. (См. рис. 12.6, где показана диаграмма этих эффектов.)

12.6. «НЕСИНГУЛЯРНОСТЬ» РАДИУСА ШВАРЦШИЛЬДА

Метрика (12.3.1) кажется сингулярной при $r = 2M$: коэффициент при dt^2 стремится к нулю, а коэффициент при dr^2 становится бесконечным. Однако нельзя сразу же заключать, что такое поведение представляет собой истинную физическую сингулярность. Действительно, коэффициент при $d\phi^2$ обращается в нуль при $\theta = 0$, но мы знаем, что это происходит просто потому, что сама система полярных координат имеет здесь особенность. Координатную особенность при $\theta = 0$ можно исключить выбором новой системы координат (например, стереографических координат на 2-сфере).

Мы уже догадывались о том, что радиус Шварцшильда $r = 2M$ является лишь *координатной сингулярностью*. Вспомним, что при радиальном падении частицы не отмечается ничего странного в точке $r = 2M$; нет ничего особого и в поведении $r(\tau)$ в этой точке. Однако координатное время t становится бесконечным при $r = 2M$. Это дает веские основания предполагать наличие координатной, а не физической сингулярности.

Есть много разных преобразований координат, которые можно использовать для убедительного доказательства, что $r = 2M$ не является физической сингулярностью. Мы продемонстрируем одно из них — *систему координат Крускала* [320, 555]. Она определяется преобразованием

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \quad (12.6.1)$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}. \quad (12.6.2)$$

Обратное преобразование задается формулами

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2, \quad (12.6.3)$$

$$\operatorname{th} \frac{t}{4M} = \frac{v}{u}. \quad (12.6.4)$$

Метрика (12.3.1) принимает вид

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (12.6.5)$$

где величина r неявно связана с u и v посредством уравнения (12.6.3). Ясно, что при $r = 2M$ метрика (12.6.5) не является сингулярной. Тем не менее при $r = 0$ сингулярность все же существует. Можно показать, что это реальная *физическая сингулярность* метрики, где напряженность гравитационного поля становится бесконечной.

Заметим, что, согласно уравнению (12.6.3), $r = 0$ при $v^2 - u^2 = 1$, или $v = \pm(1 + u^2)^{1/2}$. Оказывается, существуют две сингулярности! Заметим также, что $r \geq 2M$ — это область с $u^2 \geq v^2$, т.е. $u \geq |v|$ или $u \leq -|v|$. Другими словами, условию $r \geq 2M$ соответствуют две области!

Начальная система координат Шварцшильда покрывает только часть многообразия пространства-времени. Координаты Крускала дают аналитическое продолжение тех же решений уравнений поля на все многообразие пространства-времени. Эта ситуация отражена на *диаграмме Крускала* (рис. 12.7). Координаты Крускала обладают одним замечательным свойством: лучи света, идущие вдоль радиуса, изображаются прямыми линиями, наклоненными под углом 45° к координатным осям [см. уравнение (12.6.5) при $ds^2 = 0$]. Диаграмма Крускала является пространственно-временной диаграммой, где «временная» координата v отложена вертикально, а «пространственная» координата u — горизонтально. Ее можно рассматривать

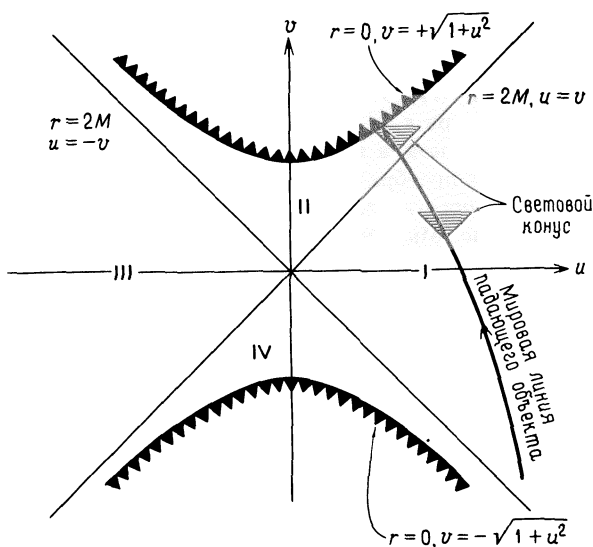


Рис. 12.7. Диаграмма Крускала метрики Шварцшильда.

как пространственно-временную диаграмму специальной теории относительности, потому что в каждой точке световые конусы ограничены прямыми линиями, наклоненными под углами $\pm 45^\circ$ к координатным осям, а мировые линии частиц должны лежать внутри световых конусов.

Область I — это «наша вселенная», начальная область с $r > 2M$. Область II — это «недра черной дыры» с $r < 2M$. Области III и IV — это «другие вселенные»: причем при $r > 2M$ область III является асимптотически плоской, а области IV соответствует $r < 2M$.

Если проверить знаки u и v в разных квадрантах, то обнаружится связь между координатами Крускала и Шварцшильда в разных областях [сравните с уравнениями (12.6.1) и (12.6.2)]:

$$u = \pm \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \quad (12.6.6)$$

$$v = \pm \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \quad (r \geq 2M), \quad (12.6.7)$$

и

$$u = \pm \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \quad (12.6.8)$$

$$v = \pm \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \quad (r \leq 2M). \quad (12.6.9)$$

Здесь верхний знак относится к «нашей вселенной», а нижний — к «другой вселенной». Уравнение (12.6.3) сохраняет силу всюду, в то время как правая часть уравнения (12.6.4) становится равной u/v при $r \leq 2M$. Уравнение (12.6.4) показывает, что линии с постоянным t являются прямыми. Эти взаимосвязи видны на рис. 12.8.

Сингулярность в верхней части диаграммы Крускала при $r = 0$ находится внутри черной дыры. Ясно, что любая времениподобная мировая линия при $r \leq 2M$ (т.е. в области II) должна попадать в сингулярность. Сингулярность в нижней части диаграммы представляет собой «белую дыру», из которой с формальной точки зрения может что-то извергаться.

Важно представлять, что полная аналитически продолженная метрика Шварцшильда — это просто математическое решение уравнений Эйнштейна. Для черной дыры, возникшей при гравитационном коллапсе, часть пространства-времени должна содержать коллапсирующее вещество. Из теоремы Биркгофа (см. разд. 5.6) известно, что вне коллапсирующей звезды геометрия по-прежнему описывается метрикой Шварцшильда. Таким образом, мировая линия точки, находящейся на поверхности звезды, будет границей части диаграммы Крускала, имеющей физический смысл (рис. 12.9). В реальных черных дырах никаких «белых дыр» и «других вселенных» не существует.

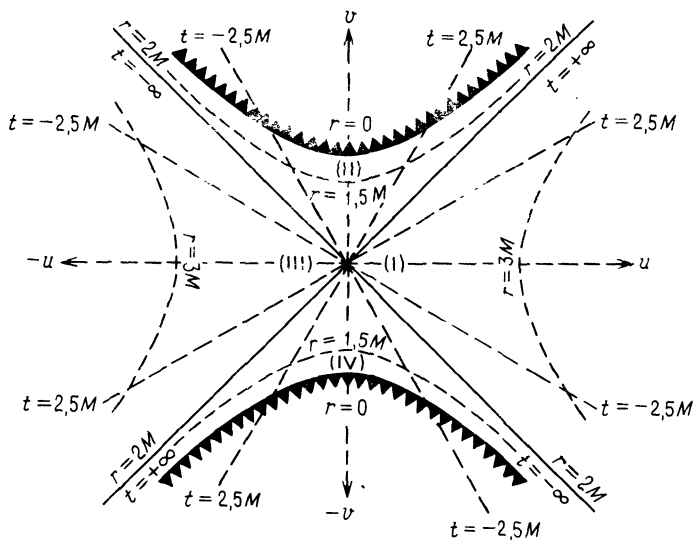


Рис. 12.8. Диаграмма Крускала метрики Шварцшильда, показывающая связь с координатами Шварцшильда (t, r) и координатами Крускала (v, u).

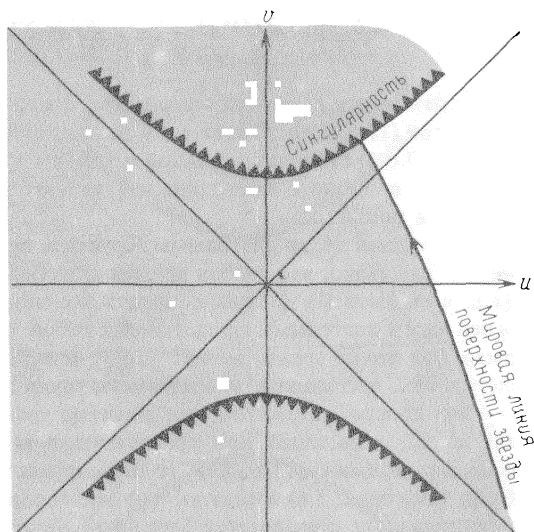


Рис. 12.9. Диаграмма Крускала для гравитационного коллапса. Физически существует только незаштрихованная часть диаграммы справа от поверхности звездеобразования. Остальная часть диаграммы должна быть заменена пространственно-временной метрикой недр звезды.

Диаграмма Крускала проясняет два основных свойства черных дыр: как только объект пересечет $r = 2M$, он обязательно должен попасть в сингулярность при $r = 0$; находясь внутри $r = 2M$, объект не может посылать сигналы на бесконечность. Однако для этого горизонта нет никакого локального метода проверки. Наблюдатель не замечает около себя ничего существенно нового при переходе от $r = 2M + \varepsilon$ к $r = 2M - \varepsilon$.

12.7. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ КЕРРА

Наиболее общая метрика стационарной черной дыры с параметром M , J и Q называется метрикой Керра—Ньюмена (см., например, [411]). Специальными случаями ее являются метрика Керра ($Q = 0$), метрика Рейснера—Нордстрема ($J = 0$) и метрика Шварцшильда ($Q = 0, J = 0$).

Заряженный астрофизический объект обычно быстро нейтрализуется окружающей плазмой. Соответственно мы упростим наше обсуждение, предположив, что заряженные черные дыры вряд ли окажутся важными с астрофизической точки зрения. В то же время все астрофизические объекты вращаются и потому ожидается, что образовавшиеся при гравитационном коллапсе черные дыры должны быть в общем случае вращающимися. Примечательно, что, когда прекращается испускание разного рода излучений, возникших при коллапсе, гравитационное поле асимптотически подстраивается к метрике Керра.

Это решение уравнений Эйнштейна, найденное Керром в 1963 году, сначала не интерпретировалось как решение, относящееся к черной дыре. Его свойства более понятны в координатах Бойера—Линдквиста [81], где

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \sin^2\theta d\phi^2. \quad (12.7.1)$$

Здесь черная дыра вращается в направлении ϕ и

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta. \quad (12.7.2)$$

Эта метрика стационарна (не зависит от t) и осесимметрична относительно полярной оси (не зависит от ϕ). Отметим, что a — момент количества движения, приходящийся на единицу массы, измеряется в сантиметрах, если принять систему единиц, в которой $c = G = 1$. Подстановка в уравнение (12.7.1) значения $a = 0$ дает метрику Шварцшильда.

Упражнение 12.15. Момент количества движения Солнца (если предположить твердотельное вращение) равен $J = 1,63 \cdot 10^{48}$ г · см²/с. Каково значение a/M для Солнца?

Ответ: 0,185.