

Диаграмма Крускала проясняет два основных свойства черных дыр: как только объект пересечет $r = 2M$, он обязательно должен попасть в сингулярность при $r = 0$; находясь внутри $r = 2M$, объект не может посылать сигналы на бесконечность. Однако для этого горизонта нет никакого локального метода проверки. Наблюдатель не замечает около себя ничего существенно нового при переходе от $r = 2M + \varepsilon$ к $r = 2M - \varepsilon$.

12.7. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ КЕРРА

Наиболее общая метрика стационарной черной дыры с параметром M , J и Q называется метрикой Керра—Ньюмена (см., например, [411]). Специальными случаями ее являются метрика Керра ($Q = 0$), метрика Рейснера—Нордстрема ($J = 0$) и метрика Шварцшильда ($Q = 0, J = 0$).

Заряженный астрофизический объект обычно быстро нейтрализуется окружающей плазмой. Соответственно мы упростим наше обсуждение, предположив, что заряженные черные дыры вряд ли окажутся важными с астрофизической точки зрения. В то же время все астрофизические объекты вращаются и потому ожидается, что образовавшиеся при гравитационном коллапсе черные дыры должны быть в общем случае вращающимися. Примечательно, что, когда прекращается испускание разного рода излучений, возникших при коллапсе, гравитационное поле асимптотически подстраивается к метрике Керра.

Это решение уравнений Эйнштейна, найденное Керром в 1963 году, сначала не интерпретировалось как решение, относящееся к черной дыре. Его свойства более понятны в координатах Бойера—Линдквиста [81], где

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \sin^2\theta d\phi^2. \quad (12.7.1)$$

Здесь черная дыра вращается в направлении ϕ и

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta. \quad (12.7.2)$$

Эта метрика стационарна (не зависит от t) и осесимметрична относительно полярной оси (не зависит от ϕ). Отметим, что a — момент количества движения, приходящийся на единицу массы, измеряется в сантиметрах, если принять систему единиц, в которой $c = G = 1$. Подстановка в уравнение (12.7.1) значения $a = 0$ дает метрику Шварцшильда.

Упражнение 12.15. Момент количества движения Солнца (если предположить твердотельное вращение) равен $J = 1,63 \cdot 10^{48}$ г · см²/с. Каково значение a/M для Солнца?

Ответ: 0,185.

Горизонт появляется там, где обращается в нуль функция метрики Δ . Это происходит прежде всего при большем корне квадратного уравнения $\Delta = 0$,

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (12.7.3)$$

Заметим, что a должно быть меньше M , чтобы черная дыра существовала. Если a превышает M , то будем иметь гравитационное поле с «голой» сингулярностью (т.е. не «прикрытой» горизонтом событий). Крупной нерешенной проблемой в общей теории относительности остается предположение Пенроуза о «космической цензуре», согласно которому гравитационный коллапс при свободных от особенностей начальных условиях никогда не приводит к появлению «голой» сингулярности. Конечно, неизвестны никакие механизмы, посредством которых исходная черная дыра Керра с $a < M$ раскручивается так, чтобы a стало больше M (см. разд. 12.8). Черная дыра с $a \equiv M$ *вращается с максимальной скоростью*.

Для обсуждения метрики Шварцшильда было полезно понятие статического наблюдателя. Это обсуждение можно обобщить на случай вращающихся черных дыр, если ввести в употребление понятие *стационарного* наблюдателя, который находится в точке с фиксированными значениями r и θ , но вращается с постоянной угловой скоростью

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{u^\phi}{u^t}. \quad (12.7.4)$$

Условие $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ (т.е. наблюдатели движутся по времениподобной мировой линии) имеет вид

$$-1 = (u^t)^2 [g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}], \quad (12.7.5)$$

где уравнение (12.7.4) было использовано для замены u^ϕ . Поэтому член уравнения (12.7.5), находящийся в квадратных скобках, должен быть отрицательным. Поскольку $g_{\phi\phi}$ в уравнении (12.7.1) — величина положительная, так может быть, если только значение Ω лежит между корнями квадратного уравнения, полученного приравниванием нулю выражения в квадратных скобках. Таким образом,

$$\Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}, \quad (12.7.6)$$

где

$$\Omega_{\max}^{\min} = \frac{-g_{t\phi} \pm (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^{1/2}}{g_{\phi\phi}}. \quad (12.7.7)$$

Упражнение 12.16. Обсудите ограничение (12.7.6) в пределе слабого поля.

Ответ: $-c/(r \sin \theta) < \Omega < c/(r \sin \theta)$; стационарные наблюдатели должны вращаться относительно оси z с $v < c$.

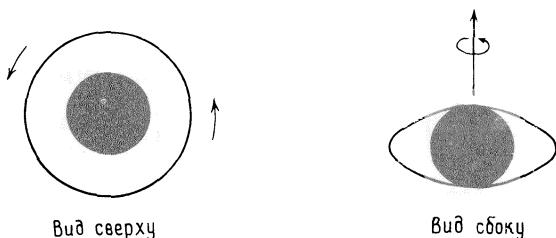


Рис. 12.10. Эргосфера черной дыры Керра: область между статическим пределом [уплощенная внешняя поверхность $r = M + (M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$] и горизонтом событий [внутренняя сфера $r = M + (M^2 - a^2)^{1/2}$].

Обратите внимание, что $\Omega_{\min} = 0$, когда $g_{tt} = 0$, т.е. когда $r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$. Это происходит при

$$r_0 = M + (M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (12.7.8)$$

Находящиеся между r_+ и r_0 наблюдатели должны иметь $\Omega > 0$; в диапазоне $r_+ < r < r_0$ нет статических наблюдателей ($\Omega = 0$). Поэтому поверхность $r = r_0$ называется статическим пределом. Она называется также «границей эргосферы» по причинам, которые станут ясными позднее.

Обратите внимание, что для $a \neq 0$ понятия горизонта r_+ и статического предела r_0 различны. Это отражено на рис. 12.10. Уравнение (12.7.7) показывает, что стационарные наблюдатели не могут существовать, когда $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} < 0$, т.е. когда $\Delta < 0$, это возможно лишь при $r < r_+$. Таким образом, мы приходим к обобщению предыдущего вывода, что статические наблюдатели не существуют внутри горизонта для шварцшильдовской черной дыры.

Метрику Керра можно аналитически продолжить внутрь $r = r_+$ способами, аналогичными крускаловскому продолжению метрики Шварцшильда. Однако это внутреннее решение не имеет физического смысла по двум причинам. Во-первых, часть его надо заменить недрами коллапсирующего объекта, образующего черную дыру. Во-вторых, что более важно, для коллапса с вращением нет теоремы Биркгофа. Метрика Керра — это не метрика внешнего пространства *в процессе* коллапса, это только *асимптотическая* форма метрики, соответствующая прекращению всех динамических процессов. Ее математическое продолжение внутрь r_+ фактически не имеет смысла. Поэтому ограничимся обсуждением области $r \geq r_+$ и примем точку зрения, что все, попадающее внутрь этой области, становится причинно разобщенным с остальной частью Вселенной.

Полное описание геодезических черной дыры Керра весьма сложно из-за отсутствия сферической симметрии. Тем не менее существует «скрытая» симметрия, которую можно использовать для аналитического решения задачи о геодезических [108, 411]. Чтобы хотя бы немного понять влияние вращения на геодезические, ограничимся рассмотрением пробной частицы в

экваториальной плоскости. Это можно сделать непосредственно без привлечения скрытой симметрии.

Положив $\theta = \pi/2$ в уравнении (12.7.1), получим лагранжиан

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{4aM}{r} \dot{t} \dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\phi}^2, \quad (12.7.9)$$

где $\dot{t} = dt/d\lambda$ и т.д. Для циклических координат t и ϕ получаем два первых интеграла движения

$$p_t \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const} = -E, \quad (12.7.10)$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const} \equiv l. \quad (12.7.11)$$

Вычислив производные из уравнения (12.7.9) и решив два уравнения для \dot{t} и $\dot{\phi}$, получим

$$\dot{t} = \frac{(r^3 + a^2 r + 2Ma^2)E - 2aMl}{r\Delta}, \quad (12.7.12)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r - 2M)l + 2aME}{r\Delta}. \quad (12.7.13)$$

Третий интеграл движения получим как обычно, приравняв $g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -m^2$, т.е. $L = -m^2/2$. После подстановки уравнений (12.7.12) и (12.7.13) и некоторых упрощений имеем

$$r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = R(E, l, r), \quad (12.7.14)$$

где

$$R \equiv E^2(r^3 + a^2 r + 2Ma^2) - 4aMEl - (r - 2M)l^2 - m^2 r \Delta. \quad (12.7.15)$$

Можно рассматривать R как эффективный потенциал радиального движения в экваториальной плоскости¹⁾. Например, круговые орбиты существуют там, где $dr/d\lambda$ остается равной нулю (точка бесконечных поворотов). Это требует

$$R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = 0. \quad (12.7.16)$$

¹⁾ Некоторые авторы определяют эффективный потенциал как величину E , приводящую к соотношению $R = 0$; мы поступали так для шварцшильдовского случая в уравнении (12.4.26).

После громоздких алгебраических выкладок уравнения (12.7.16) могут быть решены по отношению к E и l , что дает

$$\tilde{E} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}. \quad (12.7.17)$$

$$\tilde{l} = \pm \frac{\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{3/2}}. \quad (12.7.18)$$

В данном случае верхний знак относится к *прямым* орбитам (т.е. момент количества движения частицы параллелен моменту количества движения черной дыры), а нижний знак — к *обратным* орбитам. Эти формулы обобщают уравнения (12.4.28)—(12.4.29) для метрики Шварцшильда.

Упражнение 12.17. Покажите, что третий закон Кеплера принимает вид

$$\Omega = \pm \frac{M^{1/2}}{r^{3/2} \pm aM^{1/2}} \quad (12.7.19)$$

для круговых экваториальных орбит в метрике Керра ($\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}/\dot{t}$).

Круговые орбиты существуют повсюду, начиная от $r = \infty$ вплоть до предельной круговой фотонной орбиты, где обращается в нуль знаменатель формулы (12.7.17). Решив получившееся кубическое по отношению к $r^{1/2}$ уравнение, найдем условие, определяющее фотонную орбиту [45]:

$$r_{\text{ph}} = 2M\left\{1 + \cos\left[\frac{2}{3} \arccos(\mp a/M)\right]\right\}. \quad (12.7.20)$$

Для $a = 0$ получаем $r_{\text{ph}} = 3M$, а при $a = M$ находим $r_{\text{ph}} = M$ (для прямых орбит) или $4M$ (для обратных орбит).

При $r > r_{\text{ph}}$ не все круговые орбиты оказываются связанными. У несвязанной круговой орбиты $E/m > 1$. Под воздействием бесконечно малых возмущений, направленных наружу, частица с такой орбитой уходит на бесконечность по асимптотически гиперболической траектории. Связанные круговые орбиты существуют при $r > r_{\text{mb}}$, где r_{mb} —предельный радиус связанной орбиты, соответствующий $E/m = 1$:

$$r_{\text{mb}} = 2M \mp a + 2M^{1/2}(M \mp a)^{1/2}. \quad (12.7.21)$$

Отметим также, что r_{mb} — это минимальный периастр всех параболических ($E/m = 1$) орбит. В астрофизических задачах падающие из бесконечности частицы движутся по орбитам, очень близким к параболическим, поскольку $v_{\infty} \ll c$. Любая параболическая траектория, проникающая до

$r < r_{\text{mb}}$, должна приводить в черную дыру. При $a = 0$ получается $r_{\text{mb}} = 4M$, при $a = M$ находим $r_{\text{mb}} = M$ (прямые орбиты) или $r_{\text{mb}} = 5,83M$ (обратные орбиты).

Далеко не все связанные круговые орбиты оказываются устойчивыми. Для устойчивости требуется, чтобы

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \leq 0. \quad (12.7.22)$$

Из уравнения (12.7.15) получаем

$$1 - (\tilde{E})^2 \geq \frac{2}{3} \frac{M}{r}. \quad (12.7.23)$$

Подставив это в уравнение (12.7.17), получим уравнение четвертой степени для $r^{1/2}$ в предельном случае равенства. Решение для r_{ms} —предельного радиуса устойчивости круговой орбиты дано Бардином и др. [45]:

$$\begin{aligned} r_{\text{ms}} &= M \left\{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right\}, \\ Z_1 &\equiv 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{a}{M} \right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M} \right)^{1/3} \right], \\ Z_2 &\equiv \left(3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.7.24)$$

При $a = 0$ получается $r_{\text{ms}} = 6M$, при $a = M$ находим $r_{\text{ms}} = M$ (прямые орбиты) или $9M$ (обратные орбиты). Большой интерес для оценки потенциальной эффективности аккреционного диска черной дыры в качестве источника энергии представляет энергия связи предельной устойчивой круговой орбиты. Если исключить r из уравнения (12.7.17) при помощи уравнения (12.7.23), получим

$$\frac{a}{M} = \mp \frac{4\sqrt{2}(1 - \tilde{E}^2)^{1/2} - 2\tilde{E}}{3\sqrt{3}(1 - \tilde{E}^2)}. \quad (12.7.25)$$

Величина \tilde{E} уменьшается от $\sqrt{8/9}$ ($a = 0$) до $\sqrt{1/3}$ ($a = M$) для прямых орбит, но в то же время *возрастает* от $\sqrt{8/9}$ до $\sqrt{25/27}$ для обратных орбит. Максимальная энергия связи $(1 - \tilde{E})$ черной дыры, вращающейся с максимальной скоростью, равна $1 - 1/\sqrt{3}$, или 42,3% всей энергии покоя. Это количество энергии, высвобождаемое веществом, которое движется по спирали к черной дыре и проходит последовательность почти круговых экваториальных орбит. На конечном этапе погружения с r_{ms} в черную дыру выделяется ничтожно мало энергии.

Обратите внимание, что система координат Бойера—Линдквиста сводит r_{ms} , r_{mb} , r_{ph} и r_+ к $r = M$ при $a \rightarrow M$. Как отмечается в [45], этот эф-

фект кажущийся и зависит от выбора системы координат. В действительности же радиусы относятся к различным областям пространства-времени.

Исключительно интересное свойство вращающихся черных дыр заключается в том, что существуют траектории пробных частиц с отрицательной энергией. Если решать уравнение (12.7.14) относительно E , находим

$$E = \frac{2aMl + (l^2 r^2 \Delta + m^2 r \Delta + r^3 \dot{r}^2)^{1/2}}{r^3 + a^2 r + 2Ma^2}. \quad (12.7.26)$$

(Знак квадратного корня определяется, если положить $r \rightarrow \infty$.) Чтобы получить $E < 0$, требуется орбита с обратным движением ($l < 0$), удовлетворяющая соотношению

$$l^2 r^2 \Delta + m^2 r \Delta + r^3 \dot{r}^2 < 4a^2 M^2 l^2. \quad (12.7.27)$$

Граница области с орбитами, имеющими отрицательную энергию, находится, если сделать левую часть неравенства (12.7.27) настолько малой, насколько это возможно. Для этого положим $m \rightarrow 0$ (ультрарелятивистская частица) и $\dot{r} \rightarrow 0$. Тогда найдем, что граница лежит при $r = 2M = r_0$ ($\theta = \pi/2$). Можно показать, что статический предел r_0 является границей области, содержащей орбиты с отрицательной энергией, при всех значениях θ . Частица может быть только инжектирована на такую орбиту *внутри* статического предела, а затем она опускается в черную дыру.

Пенроуз [453] использовал это свойство черных дыр Керра в замечательном мысленном эксперименте для демонстрации того, что вращающиеся черные дыры являются потенциально громадными хранилищами энергии. Представим, что из бесконечности направляется частица с энергией E_∞ . Ее траектория подобрана так, чтобы она попала внутрь статического предела. «Проинструктируем» частицу (или заранее запрограммируем ее), чтобы она после этого разделилась надвое. Тогда один из кусочков идет на траекторию с отрицательной энергией и опускается в черную дыру с энергией $E_{\text{down}} < 0$. Другой возвращается на бесконечность с энергией E_{out} . Законы сохранения энергии требуют

$$E_{\text{in}} = E_{\text{out}} + E_{\text{down}}, \quad \text{т.е.} \quad E_{\text{out}} > E_{\text{in}}! \quad (12.7.28)$$

Хотя при этом какая-то масса покоя теряется в дыре, есть энергетический выигрыш на бесконечности. Энергия извлекается из энергии вращения дыры, которая слегка замедляется при захвате частицы с отрицательной энергией и обратным вращением.

Область, лежащая в пределах $r_+ < r < r_0$, где возможно извлечение энергии, называется *эргосферой* (от греческого слова, означающего работу).

К сожалению, маловероятно, чтобы оригинальный процесс Пенроуза был важным с астрофизической точки зрения. Бардин и др. [45] показали, что развал частицы надвое внутри эргосферы должен происходить с относительной скоростью, равной по крайней мере $c/2$; трудно представить астрофизические процессы, приводящие к столь большим относительным скоростям.

Прирост энергии происходит также при рассеянии волн (электромагнитных или гравитационных) соответствующей частоты вращающейся черной дырой. Волна частично поглощается, но рассеиваемая часть может при соответствующих условиях получить больше энергии, чем имела падающая волна. Важно ли рассматриваемое сверхизлучение с астрофизической точки зрения, это открытый вопрос. Механизм сверхизлучения привлекается и в качестве основы идеи «чернодырной бомбы» и как средство решения высоко развитыми цивилизациями своих энергетических проблем [465]. Между прочим, было показано, что вращающиеся черные дыры являются динамически устойчивыми объектами в том смысле, что они не могут спонтанно «взрываться», выделяя энергию [466, 563] (см. также разд. 12.8).

Упражнение 12.18. Рассмотрите частицу с $\tilde{l} = 0$, выведенную из состояния покоя на большом расстоянии от черной дыры Керра. Покажите, что частица «вращается синхронно с геометрией» по мере того, как она приближается по спирали к черной дыре вдоль конической поверхности с постоянным значением θ . Другими словами, покажите, что частица, если смотреть из бесконечности, набирает угловую скорость $d\phi/dt = \omega(r, \theta)$, где

$$\omega(r, \theta) = \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}.$$

Указание: Наблюдатели, находящиеся при фиксированных r и θ с нулевым моментом количества движения, также «вращаются синхронно с геометрией» с угловой скоростью $\omega(r, \theta)$. Такие наблюдатели определяют так называемую «локально невращающуюся систему координат» (см. [45]); таким наблюдателям освободившаяся частица, описанная выше, представляется движущейся в *радиальном* направлении.

Процедура определения углов испускания, приводящих к захвату фотона или к освобождению фотонов из излучающего источника, расположенного вблизи черной дыры Керра, была обрисована Бардином [44]. Захват следует рассматривать всякий раз, когда требуется определить природу фактически наблюдаемого на бесконечности излучения, испускаемого локальным источником вблизи черной дыры. Для вращающейся черной дыры в локально невращающейся системе координат преимущественно освобождаются на бесконечность те фотоны, которые излучаются с $v^\phi > 0$. В приложениях общего характера расчет углов выхода должен проводиться численно [153, 527].

12.8. ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДЯХ И ИСПАРЕНИЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Хокинг [268] доказал замечательную теорему о черных дырах: при любом взаимодействии площадь поверхности черной дыры никогда не может уменьшиться. Если присутствует несколько черных дыр, сумма площадей поверхности также никогда не может уменьшиться.