Прирост энергии происходит также при рассеянии волн (электромагнитных или гравитационных) соответствующей частоты вращающейся черной дырой. Волна частично поглощается, но рассеиваемая часть может при соответствующих условиях получить больше энергии, чем имела падающая волна. Важно ли рассматриваемое сверхизлучение с астрофизической точки зрения, это открытый вопрос. Механизм сверхизлучения привлекается и в качестве основы идеи «чернодырной бомбы» и как средство решения высокоразвитыми цивилизациями своих энергетических проблем [465]. Между прочим, было показано, что вращающиеся черные дыры являются динамически устойчивыми объектами в том смысле, что они не могут спонтанно «взрываться», выделяя энергию [466, 563] (см. также разд. 12.8).

Упражнение 12.18. Рассмотрите частицу с $\tilde{l} = 0$, выведенную из состояния покоя на большом расстоянии от черной дыры Керра. Покажите, что частица «вращается синхронно с геометрией» по мере того, как она приближается по спирали к черной дыре вдоль конической поверхности с постоянным значением θ. Другими словами, покажите, что частица, если смотреть из бесконечности, набирает угловую скорость $d\phi/dt = \omega(r, \theta)$, где

$$\omega(r, \theta) = \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta} \quad .$$

Указание: Наблюдатели, находящиеся при фиксированных r и θ с нулевым моментом количества движения, также «вращаются синхронно с геометрией» с угловой скоростью $\omega(r, \theta)$. Такие наблюдатели определяют так называемую «локально невращающуюся систему координат» (см. [45]); таким наблюдателям освободившаяся частица, описанная выше, представляется движущейся в *радиальном* направлении.

Процедура определения углов испускания, приводящих к захвату фотона или к освобождению фотонов из излучающего источника, расположенного вблизи черной дыры Керра, была обрисована Бардином [44]. Захват следует рассматривать всякий раз, когда требуется определить природу фактически наблюдаемого на бесконечности излучения, испускаемого локальным источником вблизи черной дыры. Для вращающейся черной дыры в локально невращающейся системе координат преимущественно освобождаются на бесконечность те фотоны, которые излучаются с $v^{\hat{\phi}} > 0$. В приложениях общего характера расчет углов выхода должен проводиться численно [153, 527].

12.8. ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДЯХ И ИСПАРЕНИЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Хокинг [268] доказал замечательную теорему о черных дырах: при любом взаимодействии площадь поверхности черной дыры никогда не может уменьшиться. Если присутствует несколько черных дыр, сумма площадей поверхности также никогда не может уменьшиться.

Площадь поверхности черной дыры Керра можно совсем просто вычислить из метрики (12.7.1). Положив $t = \text{const}$, $r = r_+ = \text{const}$ и использовав уравнение (12.7.3), найдем метрику на поверхности

$$ds^2 = \left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 + \frac{(2Mr_+)^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\, d\phi^2. \qquad (12.8.1)$$

Площадь горизонта равна

$$A = \int\int \sqrt{g}\, d\theta\, d\phi = \int\int 2Mr_+ \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 8\pi M\left[M + \left(M^2 - a^2\right)^{1/2}\right], \qquad (12.8.2)$$

где g — детерминант коэффициентов метрики, появившихся в уравнении (12.8.1). Обратите внимание, что для $a = 0$ получается $A = 4\pi(2M)^2$, как и ожидалось.

Упражнение 12.19. Используйте теорему площадей Хокинга и найдите минимальную массу M_2 черной дыры Шварцшильда, возникающей при столкновении двух черных дыр Керра с одинаковой массой M, но противоположно направленными моментами количества движения a. Покажите, что если $|a| \to M$, может быть излучено 50% массы покоя. Покажите, что ни при какой другой комбинации масс и моментов количества движения не достигается более высокая эффективность. Покажите, что, если $a = 0$, максимальная эффективность равна 29%.

Замечание. Фактическое количество энергии, генерируемое при таком столкновении, поддается численному расчету. В общем виде результат еще неизвестен, но для $a = 0$ он составляет 0,1% [544]. См. также гл. 16.

Теорему площадей можно использовать для доказательства, что нельзя получить «голую» сингулярность, добавляя частицы к черной дыре, вращающейся с максимальной скоростью, чтобы заставить ее «раскрутиться» еще сильнее. Из уравнения (12.8.2) находим, что условие $\delta A > 0$ подразумевает

$$\left[2M\left(M^2 - a^2\right)^{1/2} + 2M^2 - a^2\right]\delta M > Ma\,\delta a. \qquad (12.8.3)$$

Когда $a \to M$, это соотношение принимает вид

$$M\,\delta M > a\,\delta a. \qquad (12.8.4)$$

Таким образом, M^2 всегда остается больше a^2 и горизонт не исчезает [сравните с уравнением (12.7.3)]. Сечение захвата частиц, увеличивающих значение a/M, падает до нуля при $a \to M$.

Закон увеличения площадей выглядит очень похожим на второй закон термодинамики. Бикенстейн [59] пытался разработать термодинамику взаимодействия черных дыр. Однако в классической общей теории относительности нет равновесного состояния, включающего черные дыры. Если поместить черную дыру в термостат, она будет непрерывно поглощать излучение, не приближаясь к равновесию.

Ситуация изменилась благодаря замечательному открытию Хокинга [266, 267], который обнаружил, что, если принять во внимание квантовые эффекты, черные дыры должны испускать излучение с тепловым спектром. Ожидаемое число частиц данного вида, излучаемое в режиме с частотой ω, равно

$$\langle N \rangle = \frac{\Gamma}{\exp(\hbar\omega/kT) \mp 1}, \qquad (12.8.5)$$

где Γ — коэффициент поглощения для этой моды излучения, падающего на дыру. Коэффициент поглощения Γ является медленно меняющейся функцией ω, зависящей от типа излучаемых частиц, и близок к единице для длин волн, сильно превышающих M; для простоты мы примем его равным единице. Температура черной дыры обратно пропорциональна ее массе

$$T = \frac{\hbar}{8\pi kM} \simeq 10^{-7}\,\mathrm{K}\left(\frac{M_\odot}{M}\right). \qquad (12.8.6)$$

Заметим, что «планковская масса», «планковский радиус» составляют

$$\hbar^{1/2} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{г} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}\,\text{см} \qquad (12.8.7)$$

в системе единиц, где $c = G = 1$.

Упражнение 12.20. Проверьте соотношение чисел в уравнениях (12.8.6) и (12.8.7).

Приведем формулы Хокинга для шварцшильдовской черной дыры. Их можно легко обобщить, учитывая заряд и вращение. Из соображений размерности T получается путем приравнивания длины волны теплового излучения[1)] $\hbar c/kT$ радиусу Шварцшильда. Из-за тепловой природы спектра образуются главным образом безмассовые частицы (фотоны, нейтрино и гравитоны). Для создания значительного количества частиц с массой m требуется, чтобы $kT \sim mc^2$, т.е. радиус Шварцшильда должен быть порядка комптоновской длины волны $\lambda_c \sim \hbar/mc$ частицы.

Теперь можно вычислить энтропию черной дыры. Поскольку площадь равна (при восстановлении значений c и G)

$$A = 4\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2, \qquad (12.8.8)$$

имеем

$$d(Mc^2) = \frac{c^6}{G^2}\frac{1}{32\pi M}dA \equiv T\,dS, \qquad (12.8.9)$$

если определить энтропию S в виде

$$S = \frac{kc^3}{G\hbar}\frac{1}{4}A. \qquad (12.8.10)$$

1) Эта длина приблизительно соответствует среднему расстоянию между фотонами в равновесии при температуре T.

Отношение макроскопической величины (A) к микроскопической ($\hbar$) гарантирует, что черные дыры обладают высокой энтропией. Это согласуется с идеями об «отсутствии волос», утверждающими многообразие внутренних состояний черной дыры, соответствующих данному внешнему гравитационному полю, а также с утверждением, что при образовании черной дыры информация теряется для внешнего мира [60].

Отметим, что во время «испарения» черной дыры (излучение тепловых квантов) вследствие закона сохранения энергии M, а также A (и S) уменьшаются. Это нарушает теорему Хокинга о площадях. Однако один из постулатов теоремы о площадях заключается в том, что вещество подчиняется «сильным» энергетическим условиям, в любом случае требующим от локального наблюдателя измерений положительных плотностей энергии и отсутствия пространственно-подобных потоков энергии. Испарение черной дыры можно представить как образование пар частиц в ее гравитационном поле, причем один из членов этой пары падает на черную дыру, а второй улетает на бесконечность. При образовании пары две частицы материализуются с пространственно-подобным разделением — в сущности это и есть пространственно-подобный поток энергии.

Теорема о площадях, полученная в рамках классической общей теории относительности, заменяется обобщенным вторым законом термодинамики: в любом взаимодействии сумма энтропий всех черных дыр и энтропии вещества вне черной дыры никогда не уменьшается. Таким образом, черные дыры не просто подчиняются законам, аналогичным законам термодинамики; они на самом деле очень естественно входят в расширенные рамки термодинамики.

Процесс Хокинга можно качественно понять, рассматривая вначале образование пар частиц в сильном электрическом поле E (рис. 12.11). В квантовой механике вакуум непрерывно флуктуирует с образованием и последу-

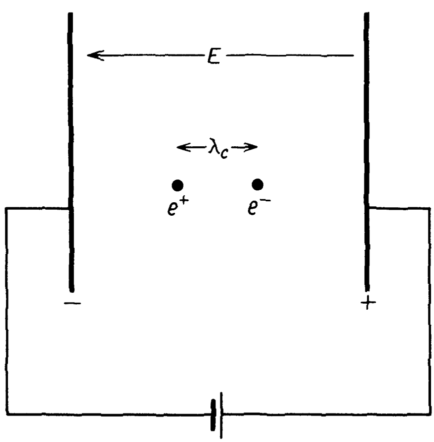

Рис. 12.11. Образование пар частиц в сильном электрическом поле.

ющей аннигиляцией пар «виртуальных» частиц. Электрическое поле стремится разделить заряды. Если поле достаточно сильное, частицы «туннелируют» под квантовым барьером и материализуются в виде реальных частиц. Критическая напряженность поля достигается тогда, когда работа по разведению частиц на расстояние порядка комптоновского радиуса равна энергии, необходимой для образования частиц

$$eE\lambda_c \sim 2mc^2. \qquad (12.8.11)$$

В случае черной дыры приливное воздействие гравитационного поля на расстоянии λ_c по порядку величины равно

$$\frac{GmM}{r^3}\lambda_c. \qquad (12.8.12)$$

Произведенная работа равна произведению этой силы на λ_c. Положив $r \sim \sim GM/c^2$, поскольку напряженность поля максимальна около горизонта, и приравняв эту работу энергии $2\,mc^2$, получим

$$\lambda_c \sim \frac{GM}{c^2}. \qquad (12.8.13)$$

Таким образом, частицы создаются, когда их комптоновская длина волны порядка радиуса Шварцшильда, как мы упоминали ранее. [В случае безмассовых частиц, которым не требуется преодолевать барьер, приведенную аргументацию придется несколько видоизменить. Скорость их образования определяется доступным фазовым объемом. Если приравнять среднюю длину волны фотона чернотельного излучения $\hbar c/kT$ единственной масштабной длине, связанной с черной дырой, GM/c^2, получим размерную оценку температуры черной дыры, т.е. уравнение (12.8.6)].

Скорость потери энергии испаряющейся черной дырой определяется формулой для черного тела

$$\frac{dE}{dt} \sim \text{площадь} \times T^4 \sim M^2 \times M^{-4} \sim M^{-2}. \qquad (12.8.14)$$

Соответствующее характерное время равно

$$\tau \sim \frac{E}{dE/dt} \sim M^3. \qquad (12.8.15)$$

Чтобы получить правильную размерность (с учетом $c = G = 1$), надо вернуть множитель $\hbar$:

$$\tau \sim \frac{M^3}{\hbar} \sim 10^{10}\left(\frac{M}{10^{15}\ \text{г}}\right)^3 \text{лет} \qquad (12.8.16)$$

Для черных дыр с массой порядка солнечной испарение посредством процесса Хокинга совершенно незначительно, что очевидно из уравнений (12.8.6) и (12.8.16). Лишь когда $M \lesssim 10^{15}$ г, характерное время становится меньше возраста Вселенной. По-видимому, такие черные «мини-дыры» могли бы образоваться лишь благодаря флуктуациям плотности во время Большого Взрыва. Шварцшильдовский радиус такой черной дыры составляет около одного ферми. Если действительно в ранней Вселенной образовалось множество черных «мини-дыр», то те из них, у которых $M \ll 10^{15}$ г, уже давно должны были бы взорваться, а дыры с массой $M \sim 10^{15}$ г должны взрываться как раз в наше время с темпом энерговыделения

$$\frac{dE}{dt} \sim 10^{20}\left(\frac{10^{15}\ \text{г}}{M}\right)^2 \text{эрг/с} \qquad (12.8.17)$$

[см. уравнение (12.8.14)], образуя кванты с энергией

$$\hbar\omega \sim 100\left(\frac{10^{15}\ \text{г}}{M}\right) \text{МэВ} \qquad (12.8.18)$$

[см. уравнение (12.8.6)]. Рис [476] и Блендфорд [70] обсудили возможность регистрации таких событий, а в работе Пейджа [441] приводятся результаты детальных расчетов спектров энергии, излучаемой черными дырами с массой 10^{15} г.

Наблюдаемая плотность энергии гамма-лучей с энергией около 100 МэВ равна $\sim 10^{-38}$ г/см^3 [197]. Вычисления Пейджа говорят о том, что около 10% энергии взрывающейся черной дыры испускается в виде фотонов (в отличие от нейтрино, гравитонов или частиц, обладающих массой). Тогда плотность черных дыр с массой 10^{15} г должна быть меньше, чем 10^{-37} г/см^3, что составляет около 10^{-8} критической плотности, необходимой, чтобы Вселенная была замкнутой [106, 120, 442].

Упражнение 12.21. а) Вычислите энтропию черной дыры с массой 1 $M_\odot$ в единицах постоянной Больцмана k.

Ответ: $S = 1{,}0 \cdot 10^{77}\,k$.

б) Оцените энтропию Солнца. Предположите, что оно состоит из полностью ионизованного водорода со средней плотностью 1 г/см^3 и со средней температурой 10^6 К.

Ответ: $S \sim 2 \cdot 10^{58}\,k$.

в) Оцените энтропию железного белого карлика с массой 1 $M_\odot$ и нейтронной звезды с массой 1 $M_\odot$. Возьмите среднюю температуру порядка 10^8 К, а средние плотности порядка 10^6 г/см$^{-3}$ и 10^{14} г/см^3 соответственно. Обратите внимание, что выражение (11.8.1) для теплоемкости C_v вырожденного идеального газа эквивалентно также S, поскольку $C_v = TdS/dT$. (Очень высокая энтропия черных дыр с информационно-теоретической точки зрения обсуждается в [60]).
