Введение в проблему переноса излучения дано в приложении И. Рекомендуем читателю, не знакомому с основами теории переноса излучения, прочитать это приложение, прежде чем переходить к следующему разделу.

14.2. БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ АККРЕЦИЯ

В этом разделе будет рассмотрена аккреция *бесстолкновительного* газа идентичных частиц с массой m на центральную звезду массой M и радиусом R. Этот процесс впервые был исследован Зельдовичем и Новиковым [636]. Общее рассмотрение будет ньютоновским, но темп аккреции, полученный для центральной шварцшильдовской черной дыры, окажется правильным и в релятивистском случае.

Вся информация об аккрецируемом газе содержится в функции распределения частиц $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, определяемой как

$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3rd^3v$ — число частиц, находящихся в элементе фазового объема d^3rd^3v с центром в точке $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, в момент времени t. (14.2.1)

Величина f называется также «плотностью в фазовом пространстве», потому что для нерелятивистских частиц d^3v и d^3p пропорциональны. Плотность частиц в координатном пространстве определяется выражением

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d^3v, \tag{14.2.2}$$

а дисперсия скоростей (т.е. «температура») — выражением

$$\left\langle v^2(\mathbf{r}, t)\right\rangle = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d^3v, \tag{14.2.3}$$

и так далее (интегрирование по всем $\mathbf{v}$).

Функция распределения f бесстолкновительного газа определяется *бесстолкновительным уравнением* Больцмана, или *уравнением Власова*

$$\frac{D}{Dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \tag{14.2.4}$$

где $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ — скорость частицы вдоль координаты $\mathbf{r}$, а $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение. Уравнение (14.2.4) — это просто уравнение неразрывности потока частиц в шестимерном фазовом объеме (вывод и обсуждение см., например, в [479]). Уравнение (14.2.4) представляет собой *теорему Лиувилля:* функция распределения сохраняется вдоль траектории каждой частицы. Для интересующей нас задачи $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\Phi$, где Φ — гравитационный потенциал

$$\Phi = \frac{-GM}{r} + \Phi_{\text{сг}}, \tag{14.2.5}$$

и для самогравитации

$$\nabla^2 \Phi_{\text{сг}} = 4\pi G \rho, \tag{14.2.6}$$

где плотность массы $\rho \equiv nm$ получается из уравнения (14.2.2). В дальнейшем будем пренебрегать самогравитацией частиц и поэтому положим $\Phi = -GM/r$, где r — расстояние до центральной звезды.

В случае стационарного течения, когда функция распределения f не зависит от времени, она зависит только от интегралов движения[1]. Для сферически симметричной системы таких интегралов два: энергия E и абсолютная величина момента количества движения J, значения которых (в пересчете на единицу массы) даются выражениями

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r) = \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{2}\frac{J^2}{r^2} - \frac{GM}{r}, \tag{14.2.7}$$

$$J = rv_t. \tag{14.2.8}$$

Здесь v_r и v_t — радиальная и поперечная скорость частиц. При заданных E и J траектория частицы в сферическом потенциале полностью определена и, следовательно, $f = f(E, J)$. Если, кроме того, распределение по скоростям повсюду изотропно, то функция f упрощается еще больше, так как она не зависит от J. В этом случае $f = f(E)$, где в соответствии с уравнением (14.2.7) $E \geqslant \phi(r)$ [т.е. частицы с $E < \phi(r)$ отсутствуют]. Для стационарного сферического распределения с изотропными скоростями уравнение (14.2.2) сводится к виду

$$n(r) = 4\pi \int v^2 f\, dv = 4\pi \int_{E=\Phi}^{\infty} [2(E-\Phi)]^{1/2} f(E)\, dE, \tag{14.2.9}$$

а уравнение (14.2.3) — к виду

$$\left\langle v^2(r) \right\rangle = \frac{4\pi}{n(r)} \int_{E=\Phi}^{\infty} [2(E-\Phi)]^{3/2} f(E)\, dE. \tag{14.2.10}$$

Упражнение 14.1. Докажите что при $f = f(E)$ справедливы соотношения $\langle v^2(r)\rangle = 3\langle v_r^2(r)\rangle$ и $\langle v_r^2(r)\rangle = \langle v_t^2(r)\rangle/2$.

Рассмотрим теперь аккрецию невзаимодействующих частиц на звезду. Частицы, имеющие момент количества движения, меньший критического значения $J_{\min}(E)$, будут захвачены звездой, когда достигнут перицентра. Для нерелятивистских частиц, обращающихся вокруг ньютоновской звезды с радиусом R, имеем

$$J_{\min}(E) \equiv \left[2\left(E + \frac{GM}{R}\right)\right]^{1/2} R \quad \text{(нерелятивистские частицы; ньютоновская звезда).} \tag{14.2.11}$$

---

[1] Этот результат часто называют «теоремой Джинса» [299].

Упражнение 14.2. Проверьте уравнение (14.2.11).

Для нерелятивистских частиц, обращающихся вокруг черной дыры (или очень компактной нейтронной звезды), имеем

$$J_{\min}(E) = \frac{4GM}{c} \quad \text{(нерелятивистские частицы; черная дыра).} \tag{14.2.12}$$

Этот результат следует из упражнения 12.9, поскольку условие для захвата имеет вид $\tilde{E}^2 > V_{\max}$ и $\tilde{E}^2 = 1$ для нерелятивистских частиц. Поэтому величина $J_{\min}(E)$ определяет «конус потерь» в пространстве скоростей, в пределах которого частицы поглощаются звездой вблизи перицентра. Благодаря наличию конуса потерь $[J < J_{\min}(E)]$ удобно определить плотность частиц как функцию от E и J. Уравнения (14.2.7) и (14.2.8) позволяют переписать элемент d^3v скорости в виде

$$d^3v = 2\pi v_t\, dv_t\, dv_r = \frac{4\pi J\, dJ\, dE}{r^2|v_r|}, \tag{14.2.13}$$

где «дополнительный» множитель 2 появляется по той причине, что при заданной энергии E величина v_r может быть как положительной, так и отрицательной. Теперь можно определить $N^-(r, E, J)$ — число частиц с направленной внутрь радиальной скоростью, приходящееся на единичный интервал значений r, E и J:

$$\begin{aligned} N^-(r, E, J)\, dr\, dE\, dJ &= \tfrac{1}{2} f(E, J)\, d^3r\, d^3v \\ &= 8\pi^2 \frac{J}{|v_r|} f\, dr\, dE\, dJ. \end{aligned} \tag{14.2.14}$$

Полный темп захвата частиц центральной массой равен

$$\dot{N}_{\text{tot}} = \int_{\Phi(r)}^{\infty} dE \int_{J=0}^{J_{\min}(E)} dJ\, |v_r| N^-(r, E, J)\Big|_{r=R} = 8\pi^2 \int_{\Phi(R)}^{\infty} dE \int_0^{J_{\min}(E)} dJ\, fJ, \tag{14.2.15}$$

а соответствующий темп аккреции массы составляет $\dot{M}_{\text{tot}} = m\dot{N}_{\text{tot}}$.

Рассмотрим теперь конкретный пример, анализируя захват *несвязанных* нерелятивистских частиц с энергиями $E > 0$. Предположим, что всегда существует бесконечный резервуар таких частиц, окружающий звезду, и что распределение частиц изотропное и моноэнергетическое. Вдали от звезды концентрация частиц постоянна и равна n_∞, а скорость частиц равна $v_\infty \ll c$. Таким образом,

$$f = f(E) = n_\infty \frac{\delta(E - E_\infty)}{4\pi(2E_\infty)^{1/2}}, \tag{14.2.16}$$

где

$$E_\infty = \tfrac{1}{2}v_\infty^2, \qquad v_\infty \ll c. \tag{14.2.17}$$

Нормировка дельта-функции в формуле (14.12.16) может быть проверена сравнением с уравнением (14.2.9), поскольку $\Phi = 0$ при $r = \infty$. На больших расстояниях $f \to n_\infty \delta(v - v_\infty)/4\pi v_\infty^2$, но выражение (14.2.16) справедливо *всюду* согласно теореме Лиувилля. Из выражения (14.2.15) сразу же подсчитывается темп захвата несвязанных частиц

$$\dot{N}(E > 0) = 8\pi^2 \int_0^\infty dE\, f(E) \int_0^{J_{\min}} dJ\, J = 4\pi^2 \int_0^\infty dE\, f(E)\, J_{\min}^2(E). \tag{14.2.18}$$

Этот результат применим даже в случае аккреции на черную дыру, поскольку при стационарном поглощении несвязанных частиц первое интегрирование в уравнении (14.2.15) может быть оценено для произвольно большого r. Тогда формулы (14.2.11), (14.2.12) и (14.2.16)—(14.2.18) дают

$$\dot{M}(E > 0) = m\dot{N}(E > 0)$$

$$= \begin{cases} 2\pi G M^2 \rho_\infty v_\infty^{-1} \dfrac{R}{M}\left(1 + \dfrac{v_\infty^2 R}{2MG}\right) & (14.2.19) \\ \text{(нерелятивистские частицы; ньютоновская звезда),} & \\ 16\pi (GM)^2 \rho_\infty v_\infty^{-1} c^{-2} & \\ \text{(нерелятивистские частицы; черная дыра),} & (14.2.20) \end{cases}$$

где $\rho_\infty = mn_\infty$.

Упражнение 14.3. Выведите заново уравнения (14.2.19) и (14.2.20), обратив внимание, что масса, пересекающая в единицу времени сферу большого радиуса $r \gg R$ по направлению внутрь равна (для частиц, находящихся на орбитах захвата) $\dot{M}(E > 0) = (\rho_\infty v_\infty/4\pi)4\pi r^2 \Delta\Omega_c$, где телесный угол захвата равен $\Delta\Omega_c = \sigma_c/r^2$, а сечение захвата σ_c дается уравнениями (12.4.38) или (12.4.39). Поэтому $\dot{M}(E > 0) = \rho_\infty v_\infty \sigma_c$.

Упражнение 14.4. а) Вычислите темп аккреции массы на шварцшильдовскую черную дыру, помещенную в изотропный резервуар фотонов с плотностью энергии ε_∞^r вдали от звезды.

Указание: Используйте метод предыдущего упражнения и уравнение (12.5.12) для σ_3.

Ответ: $\dot{M} = 27\pi G^2 M^2 \varepsilon_\infty^r / c^5$.

б) Какова минимальная масса черной дыры, которая может удвоить свою массу за время, меньшее возраста Вселенной $t = 10^{10}$ лет, если ее поместить в фоновое космическое микроволновое излучение с температурой 3 К? Примите, что температура микроволнового фона за этот период не изменялась со временем.

Обратите внимание, что вместо уравнения (14.2.19) надо использовать уравнение (14.2.20), когда $Rc^2/GM < 8$, как, например, в случае очень компактных нейтронных звезд. Выполняя оценку выражения (14.2.20) для условий, присущих ионизованному компоненту межзвездной среды нашей Галактики, получаем темп аккреции на черную дыру

$$\dot{M}(E > 0) = 1{,}56 \cdot 10^{-23}\left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24}\ \text{г/см}^3}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{v_\infty}{10\ \text{км/с}}\right)^{-1} \text{M}_\odot/\text{год}. \tag{14.2.21}$$

Нетрудно вывести дисперсию скоростей несвязанных частиц и их плотность в виде функций расстояния от звезды для функции распределения, задаваемой уравнением (14.2.16). Потребуем выполнения условия $r \gg R$, чтобы можно было пренебречь исчезновением частиц из-за соударения со звездной поверхностью и релятивистскими поправками вблизи горизонта событий черной дыры. В соответствии с этим выражение (14.2.9), рассчитанное для $E > 0$, дает

$$n_{E>0}(r) = n_\infty\left(1 + \frac{2GM}{v_\infty^2 r}\right)^{1/2}, \tag{14.2.22}$$

а уравнение (14.2.10) дает

$$\langle v^2(r)\rangle_{E>0} \equiv v^2(r) = v_\infty^2\left(1 + \frac{2GM}{v_\infty^2 r}\right). \tag{14.2.23}$$

Уравнение (14.2.23) может быть также получено из (14.2.7) и (14.2.17). Его можно использовать для определения «температуры» частиц в соответствии с

$$T_{E>0}(r) = T_\infty\left(1 + \frac{2GM}{v_\infty^2 r}\right), \qquad \tfrac{3}{2}kT \equiv \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{14.2.24}$$

В нашем случае уравнения (14.2.22)—(14.2.24) иллюстрируют весьма общую особенность сферически симметричной аккреции на центральную массу. Определим радиус «аккреции», или «захвата» r_a как такой радиус, при котором кинетическая энергия частицы равна ее потенциальной энергии

$$r_a \equiv \frac{2GM}{v_\infty^2}. \tag{14.2.25}$$

Тогда очевидно, что при $r \gg r_a$ профили плотности и температуры мало отличаются от их асимптотических значений на бесконечности. Однако при $r \ll r_a$ гравитационный потенциал центральной массы влияет на распределение, фокусирует частицы и увеличивает их плотность и температуру. Качественно аналогичное поведение характерно также для гидродинамической аккреции (см. разд. 14.3), но в этом случае плотность увеличивается гораздо сильнее, чем по формуле (14.2.22), благодаря столкновениям.

Упражнение 14.5. Рассмотрите аккрецию несвязанных частиц, подчиняющихся вдалеке от центральной звезды распределению Максвелла—Больцмана (MB) для скоростей и имеющих концентрацию n_∞ и *среднеквадратичную* скорость v_∞. Подсчитайте $\dot{M}(E > 0)$, $n(r)$, $\langle v^2(r)\rangle$ и $T(r)$ для такого распределения; изучите как случай ньютоновской звезды, так и случай черной дыры (но только для $r \gg R$).

Ответ: $$\dot{M}_{\rm MB}(E > 0) = 8(24\pi)^{1/2}G^2M^2\rho_\infty v_\infty^{-1}c^{-2} \qquad (14.2.26)$$

(нерелятивистские частицы; черная дыра).

Как подчеркивается Зельдовичем и Новиковым [636], приведенные выше уравнения для $\dot{M}$, $n(r)$ и других параметров могут применяться только к *несвязанным* частицам, достигающим центральной звезды из бесконечности с $E > 0$. Число *связанных* частиц неограниченно, если полностью пренебречь столкновениями. В этом случае распределение связанных частиц, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг центральной звезды, является начальным условием, которое может быть задано произвольно и независимо от уравнения (14.2.16). При строгом отсутствии столкновений семейство связанных частиц на орбитах захвата не пополняется за счет распределения несвязанных частиц. Лишь при наличии столкновений частица с энергией $E > 0$ может случайно в результате рассеяния перейти на связанную орбиту с $E < 0$. Поэтому влияние любого вклада связанных частиц в $\dot{M}$ непродолжительно и исчезает со временем, когда достигается стационарное состояние.

Пожалуй, более интересен случай, когда столкновения *все же* происходят. Если длина свободного пробега между столкновениями много меньше характерного размера, т.е. $\lambda_c \ll r$ (большие сечения рассеяния), то течение становится *гидродинамическим* и его можно определить путем анализа движения *жидкости*. Этот важный режим обсуждается подробнее в следующем разделе. Если же $\infty > \lambda_c \gg r$ (так что сечения рассеяния малы, но конечны), режим течения описывается уравнением Больцмана с учетом столкновений:

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c. \qquad (14.2.27)$$

В данном случае правая часть уравнения (14.2.27) не обращается в нуль, потому что столкновения могут изменить распределение частиц в фазовом объеме.

В общем случае уравнение (14.2.27) чрезвычайно сложно для решения. Упрощение возможно, когда неравенство $\lambda_c \gg r$ оказывается очень сильным. Тогда в нулевом приближении функция распределения удовлетворяет условию $Df/Dt \approx 0$, а столкновительный член рассматривается как возмущение первого порядка. В этом режиме характерное «динамическое время пересечения», соответствующее периоду орбитального движения частицы, $t_d \sim r/v$, гораздо меньше характерного времени релаксации вследствие столкновений $t_r \sim \lambda_c/v$, т.е. $t_d \ll t_r$. Таким образом, на интервалах, сравнимых с *динамическим* временем, функция f в первом приближении должна удовлетворять уравнению Власова (14.2.4); она с высокой степенью точности подчиняется теореме Лиувилля и для сферически симметричных систем должна иметь вид $f = f(E, J)$. Однако из-за столкновений функция распределения f должна также испытывать медленные вековые изменения на интервалах, сравнимых с характерным временем релаксации. Действительно, при $t \gg t_r$ столкновения фактически определяют *вид* функции распределения, выбирая среди многих возможных решений уравнения Власова именно те, которые удовлетворяют «столкновительным» ограничениям. Здесь напрашивается аналогия с динамическим равновесием эволюционирующих звезд, которые с высокой степенью точности удовлетворяют условию гидростатического равновесия, но испытывают вековое расширение или сжатие во временных масштабах, определяемых процессом термоядерного синтеза.

Дальнейшее упрощение возможно, если основные эффекты столкновений порождаются *рассеянием на малые углы*. В этом случае итоговое отклонение частиц определяется накапливающимся эффектом многократных рассеяний на малые углы, а не небольшим числом соударений, приводящих к рассеянию на большие углы ($\sim 90°$). Тогда можно представить правую часть уравнения (14.2.7) в виде следующего приближения разложения по возмущениям, называемого *уравнением Фоккера—Планка*. Такое разложение удобно, когда столкновения имеют кулоновский характер (т.е. когда силы между частицами изменяются как $1/r^2$), как, например, при кулоновском рассеянии заряженных частиц в плазме или при гравитационном рассеянии тел в звездном скоплении.

Предполагается, что в типичных случаях течение плазмы на компактную звезду по своей природе является гидродинамическим с $\lambda_c \ll r$[1]. С другой стороны, динамическое поведение звезд в шаровом звездном скоплении описывается уравнением Фоккера—Планка. В этом случае величина λ_c, связанная с гравитационными «столкновениями» (т.е. рассеянием) между звездами, удовлетворяет условию $\infty > \lambda_c \gg r$ или $t_d \ll t_r$. Динамическая эволюция шаровых звездных скоплений в последнее время привлекает большой интерес теоретиков. Это связано с разработкой новых численных методов решения уравнения Фоккера—Планка, появлением хороших наблюдательных данных для шаровых скоплений и открытием рентгеновского излучения от шаровых скоплений (см. гл. 13)[2]. Отметим, наконец, что динамическое поведение нормальных галактик описывается бесстолкнови-

---

[1] См., однако, анализ случая с $\lambda_c > r$ в [58].

[2] Для ознакомления с общим обсуждением динамической эволюции шаровых звездных скоплений рекомендуем читателю обзоры [365, 548] и помещенные там ссылки на литературу.

тельным уравнением Больцмана, поскольку $t_d \ll t_{\text{H}} \ll t_r$, где $t_H \sim 1/H \sim$ $\sim 10^{10}$ лет [$H \sim 100$ км/(с · Мпс)] — возраст Вселенной, а H — постоянная Хаббла.

Упражнение 14.6. Подсчитайте скорость, с которой несвязанные звезды с распределением Максвелла—Больцмана будут поглощаться массивной черной дырой M, расположенной в центре очень плотного активного галактического ядра. Предположите, что звездная плотность равна $n_\infty = 10^7 \text{пс}^{-3}$, а дисперсия скоростей составляет $\langle v_\infty^2 \rangle^{1/2} = 250$ км/с вдали от дыры. Предположите далее, что звезды поглощаются вслед за приливным возмущением дырой на расстоянии приливного разрушения $r_D = R(M/m)^{1/3}$, где m — масса, а R — радиус звезды.

Указание: $J_{\min}(E) = [2(E + GM/r_D)]^{1/2} r_D$.

14.3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ АККРЕЦИЯ

Учитывая существующие типичные условия газовой динамики в межзвездной среде и при обмене веществом между звездами двойных систем, можно полагать, что аккреционное течение на компактные объекты по своему характеру должно быть *гидродинамическим.* Иногда одних лишь столкновений может оказаться недостаточно, чтобы эффективно связать частицы, как в случае кулоновских столкновений в межзвездной плазме, аккрецируемой на компактную звезду с массой порядка солнечной. Однако обычно влияние макроскопически слабых магнитных полей или двухпотоковых плазменных неустойчивостей (либо другие коллективные плазменные эффекты) сокращает эффективную длину свободного пробега частицы, делая ее малой (т.е. $\lambda_{\text{eff}} \ll r$), и тем самым обеспечивает гидродинамический характер течения. Такова, например, ситуация, наблюдаемая в солнечном ветре, где магнитные поля и плазменные неустойчивости приводят к сильной связи между заряженными частицами разного типа и сохраняют гидродинамический характер истечения ветра[1].

Рассмотрим теперь стационарную сферически симметричную аккрецию окружающего газа на стационарную невращающуюся черную дыру с массой M в предельном случае сплошной среды. Предположим, что течение газа в первом приближении адиабатическое, рассматривая потери энтропии из-за излучения как малое возмущение. При этих предположениях газ будет характеризоваться показателем адиабаты Γ, а давление повсюду будет связано с плотностью массы покоя соотношением

$$P = K\rho^{\Gamma} \qquad K, \Gamma \text{ — const.} \tag{14.3.1}$$

---

[1] Истечение звездного ветра фактически представляет собой аккрецию, «обращенную во времени»; см. ниже.