14.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ АККРЕЦИИ НА ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В этом разделе будет оценено количество излучения, испускаемого во время стационарной сферически симметричной аккреции на стационарную черную дыру. В общем случае такие вычисления нетривиальны, поскольку требуется самосогласованное рассмотрение гидродинамических уравнений движения, связанных с уравнениями переноса излучения. Более того, результат сильно зависит от предполагаемых физических (граничных) условий, существующих вдали от черной дыры ($r \gg r_s$). В процессе последующего обсуждения будет рассмотрен простой случай, когда гидродинамическое течение является в первом приближении адиабатическим, а потери энергии на излучение представляют собой малое возмущение. Итак, можно воспользоваться адиабатическими уравнениями Бонди для определения течения и использовать результирующий профиль течения для расчета темпа испускания излучения. Если этот темп излучения меньше темпа аккреции *тепловой* энергии, течение будет почти адиабатическим, а проведенный анализ — целиком самосогласованным. По окончании анализа докажем важное обстоятельство: *сферически симметричная* аккреция на черную дыру *может и не быть* эффективным механизмом преобразования энергии, соответствующей массе покоя, в излучение. Разумеется, этот важный результат очень сильно зависит от «режима», но справедлив по крайней мере для одного астрофизического процесса — аккреции межзвездного газа на черную дыру [525, 526, 527, 539].

Для определенности предположим, что шварцшильдовская черная дыра находится в состоянии покоя среди однородного ионизованного газа, состоящего из чистого водорода. Предположим, что покоящийся на бесконечности газ, имеющий температуру T_∞ и концентрацию частиц n_∞, стационарно аккрецируется на черную дыру. Такая ситуация соответствует случаю аккреции в типичных межзвездных областях HII (т.е. областях ионизованного водорода), где $n_\infty \sim 1$ см$^{-3}$ и $T_\infty \sim 10^4$ K.

В адиабатическом пределе течение описывается уравнениями Бонди с одним важным исключением: показатель адиабаты $\Gamma = \Gamma(T)$ будет изменяться в зависимости от температуры T и, следовательно, от расстояния до дыры r. Конкретно, по мере того как r уменьшается, а kT увеличивается выше $m_e c^2$, электроны становятся релятивистскими, что приводит к падению Γ до значений ниже 5/3. По существу имеются два разных режима адиабатического течения, различающихся величиной температуры: $kT \ll m_e c^2$ или $kT \gg m_e c^2$ (но всегда $kT \ll m_p c^2$). В обоих режимах Γ фактически является постоянной. Для адиабатических изменений имеем (помня, что здесь $\rho = mn$ означает плотность массы покоя)

$$d\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{14.4.1}$$

Здесь ε — плотность полной энергии, $\varepsilon = \rho c^2 + \varepsilon'$. Используя уравнение

(14.3.1) и выполнив интегрирование, получаем выражение для плотности тепловой энергии в любом режиме

$$\varepsilon' = \frac{P}{\Gamma - 1}, \qquad \Gamma = \text{const} \tag{14.4.2}$$

В режиме $kT \ll m_e c^2$ (т.е. $T \ll 6 \cdot 10^9$ К) водородная плазма является нерелятивистской, так что

$$\varepsilon' = 3nkT, \qquad P = 2nkT. \tag{14.4.3}$$

Вклад протонов и электронов одинаков, так как n — концентрация протонов, равная концентрации электронов.

Плотность полной энергии равна

$$\varepsilon = n(m_p + m_e)c^2 + 3nkT. \tag{14.4.4}$$

Сравнение выражений (14.4.2) и (14.4.3) дает знакомый результат:

$$\Gamma = \tfrac{5}{3}, \qquad kT \ll m_e c^2. \tag{14.4.5}$$

Для области ближе к черной дыре найдем, что $m_e c^2 \ll kT \ll m_p c^2$ (т.е. $6 \cdot 10^9$ К $\ll T \ll 1 \cdot 10^{13}$ К). Электроны становятся релятивистскими, а протоны остаются нерелятивистскими. Поэтому

$$\varepsilon' = \left(3 + \tfrac{3}{2}\right)nkT, \qquad P = 2nkT,$$

$$\varepsilon = \tfrac{9}{2}nkT + nm_p c^2, \qquad \Gamma = \tfrac{13}{9}, \qquad m_e c^2 \ll kT \ll m_p c^2. \tag{14.4.6}$$

Здесь для релятивистских электронов использовано соотношение $\varepsilon = \varepsilon' = 3nkT$.

Упражнение 14.15. Покажите, что для полностью ионизованной смеси водорода и гелия получается

$$\Gamma = \frac{\tfrac{13}{9}X + \tfrac{7}{3}(1 - X)}{X + \tfrac{5}{3}(1 - X)}$$

вместо (14.4.6). Здесь X — относительное содержание водородных ионов, следовательно, $(1 - X)$ — относительное содержание ионов гелия.

Упражнение 14.16. Покажите, что для релятивистских электронов и протонов (т.е. $kT \gg m_p c^2$) $\Gamma = 4/3$. Объясните, почему точно такое значение Γ получается для чисто протонного газа.

Поскольку ε и P подобраны так, чтобы быть непрерывными при $kT = 2/3\, m_e c^2$, имеет смысл определить «эффективный показатель адиабаты» Γ^* посредством соотношений

$$\Gamma^* = \frac{5}{3}, \qquad \frac{kT}{m_e c^2} \leqslant \frac{2}{3}$$

$$= \frac{13}{9}, \qquad \frac{m_p}{m_e} \gg \frac{kT}{m_e c^2} > \frac{2}{3}. \tag{14.4.7}$$

Разумеется, переход от нерелятивисткого режима к релятивистскому на самом деле не резкий, а гладкий и постепенный; однако соотношений (14.4.7) вполне достаточно для наших целей.

Теперь нетрудно получить решение для течения. Как обсуждалось в разд. 14.3, темп аккреции определяется параметрами газа на больших расстояниях от черной дыры, где электроны еще не стали релятивистскими. В этой области $\Gamma^* = 5/3$ и

$$a_\infty = \left[2 \times \frac{5}{3}\frac{kT_\infty}{m_p}\right]^{1/2}. \tag{14.4.8}$$

Темп аккреции $\dot{M}$ определяется уравнением (14.3.16), которое выражено численно в (14.3.20) для рассматриваемого сейчас случая ($\lambda_s = 1/4$). При больших $r \gg r_a \equiv GM/a_\infty^2$ уравнения (14.3.21) и (14.3.22) описывают параметры течения. При малых $r \ll r_a$ существуют два режима в зависимости от того, являются электроны релятивистскими или нет. Определим переходный радиус r_*, при котором $kT = kT_* = \frac{2}{3} m_e c^2$. Параметры течения в этом случае следуют из (14.3.26) и (14.3.27) для нерелятивистской области $r_* < r < r_a$, где скорость еще дозвуковая[1)].

Упражнение 14.17. а) Покажите, что r_* определяется выражением

$$r_* = \frac{9}{40}\frac{GM}{c^2}\frac{m_p}{m_e}. \tag{14.4.9}$$

б) Найдите численные значения радиусов $r_h = 2GM/c^2$, r_* и r_a в единицах $M/M_\odot$ и $T_\infty/10^4$ К.

[1)] Как показано в приложении Ж, течение для $\Gamma \equiv 5/3$ становится *околозвуковым* при радиусе $r_s = 3GM/4a_\infty c > 0$, если принимать во внимание общую теорию относительности. Соответствующий темп аккреции, определяемый при r_s, все еще дается уравнением (14.3.16), а параметры газа повсюду остаются сравнимыми с ньютоновскими значениями. Для $\Gamma \equiv \Gamma^*$ темп аккреции остается *таким же*, если только $r_s > r_*$, т.е. если $\frac{10}{3}(m_e/m_p)c/a_\infty > 1$ или $T_\infty < 1 \cdot 10^7$ К [см. (14.4.9) и (14.3.19)]. Тот факт, что Γ изменяется при r_*, не имеет отношения к определению $\dot{M}$, поскольку это изменение не может «передаваться» против сверхзвукового течения. В другом случае уравнение (14.3.16) также дает достаточно точное значение $\dot{M}$, если только выполняется соотношение $1 \gg 5/3 - \Gamma > \frac{9}{30}(a_\infty/c)^2 m_p/m_e$ для $r > r_*$. Это условие гарантирует, что, хотя Γ^* близко к 5/3 выше по течению, оно отклоняется от 5/3 настолько, чтобы сделать возможным неравенство $r_s > r_*$ [см. (14.3.14)].

В области релятивистских электронов $2GM/c^2 < r \ll r_*$ и течение оказывается сверхзвуковым, так что уравнения (14.3.23) и (14.3.24) применимы для определения u и ρ соответственно. Температура дается общим соотношением $T \sim \rho^{\Gamma^* - 1}$, которое в сочетании с уравнениями (14.3.24) и (14.4.7) дает

$$\frac{T}{T_*} \approx \left(\frac{r_*}{r}\right)^{2/3}. \tag{14.4.10}$$

Упражнение 14.18. а) Подсчитайте температуру T_h на горизонте событий и сравните ее с температурой адиабатического течения с постоянным значением $\Gamma = 5/3$ [см. уравнение (Ж.46)].

Ответ:

$$T_h \approx \frac{2}{3}\left(\frac{9}{80}\right)^{2/3}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{1/3}\frac{m_p c^2}{k}$$

$$\approx 1{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{К} < T\left(\Gamma = \tfrac{5}{3}\right) \tag{14.4.11}$$

б) Подсчитайте $\rho(r)/\rho_\infty = n(r)/n_\infty$ на горизонте событий.

Ответ:

$$n(r)/n_\infty \approx 3{,}7 \cdot 10^{11}\left(T_\infty/10^4\right)^{-3/2}. \tag{14.4.12}$$

Отметим, что точное интегрирование релятивистских уравнений Эйлера с использованием соотношения (14.4.7) дает на горизонте $T = 1{,}0 \cdot 10^{11}$ К и $\rho/\rho_\infty = 3{,}9 \cdot 10^{11}$ $(T_\infty/10^4\ \text{К})^{-3/2}$ [525]. Замена (14.4.7) реальной, зависящей от температуры непрерывной функцией $\Gamma = \Gamma(T)$ дает вместо этого $T = 0{,}76 \cdot 10^{11}$ К, но значение ρ/ρ_∞ на горизонте сохраняется прежним [87].

Теперь, когда параметры течения известны в виде функций координат, можно вычислить интенсивность излучения. Большая часть излучения возникает в области, расположенной вблизи горизонта событий с внешней стороны, где температура и плотность газа достигают максимальных значений. В интересующем нас диапазоне температур и плотностей преобладающим механизмом излучения будет *тепловое тормозное излучение,* или свободно-свободное излучение. Релятивистское тормозное излучение генерируется вследствие неупругого рассеяния релятивистских тепловых электронов (нерелятивистскими) ионами и другими электронами. Излучательная способность (интенсивность излучения на единицу объема) в предельно релятивистском случае определяется выражением

$$\Lambda_{\text{ff}} = (\Lambda_{ei} + \Lambda_{ee})\ \text{эрг/(см}^3 \cdot \text{с)}\,, \tag{14.4.13}$$

где

$$\Lambda_{ei} = 12\alpha Z^2 r_0^2 n_e n_i ckT\left[\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{2kT}{m_e c^2}\right) - 0{,}577\right],$$

$$\Lambda_{ee} = 24\alpha r_0^2 n_e^2 ckT\left[\frac{5}{4} + \ln\left(\frac{2kT}{m_e c^2}\right) - 0{,}577\right]. \tag{14.4.14}$$

В уравнении (14.4.14) $\alpha = e^2/hc$—постоянная тонкой структуры, а $r_0 = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона[1]. Для рассматриваемого здесь газа, состоящего из чистого водорода, $Z = 1$ и $n_e = n_i \equiv n$.

Упражнение 14.19. а) Объясните, почему $\Lambda_{ee}/\Lambda_{ei} \approx 2$ в предельно релятивистском случае для чистого водорода.

б) Каково приближенное значение отношения $\Lambda_{ee}/\Lambda_{ei}$ для нерелятивистского газа, состоящего из водорода?

Ответ: $\dfrac{\Lambda_{ee}}{\Lambda_{ei}} \sim \dfrac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \sim \dfrac{kT}{m_e c^2}$ **(нерелятивистский газ).**

Если пренебречь эффектами специальной теории относительности, связанными с движением падающего газа, и эффектами общей теории относительности, проявляющимися в сильном гравитационном поле черной дыры, полная светимость газа равна

$$L_{\mathrm{ff}} \approx \int_{r_h}^{\infty} \Lambda_{\mathrm{ff}} 4\pi r^2\, dr \sim \Lambda_{\mathrm{ff}} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \Bigg|_{r_h}$$

$$\sim 8 \cdot 10^{20} \left(\frac{n_\infty}{1\ \text{см}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{T_\infty}{10^4\ \text{K}} \right)^{-3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{эрг/с}. \qquad (14.4.15)$$

При получении выражения (14.4.15) были использованы параметры течения на горизонте, выведенные в некотором приближении в упражнении 14.18. Поскольку подынтегральное выражение резко растет при уменьшении r, основной вклад в излучение дает область, расположенная с внешней стороны горизонта. Точное релятивистское интегрирование испускаемого излучения дает [525, 527]

$$L_{\mathrm{ff}} = 1.2 \cdot 10^{21} \left(\frac{n_\infty}{1\ \text{см}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{T_\infty}{10^4\ \text{K}} \right)^{-3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{эрг/с}. \qquad (14.4.16)$$

В этом выражении соответствующим образом учтены релятивизм течения, доплеровское и гравитационное красные смещения, захват фотонов черной дырой и т.п. Соответствующий спектр оказывается умеренно плоским при энергиях ниже

$$h\nu \sim kT_h \sim 10\ \text{МэВ}, \qquad (14.4.17)$$

и экспоненциально спадает при более высоких энергиях. Таким образом, излучение состоит в значительной степени из очень жестких рентгеновских лучей и гамма-лучей. При характерных межзвездных плотностях аккреци-

---

[1] См. [388]. Читатель может приближенно скомпоновать выражения (14.4.14) на основе уравнений и обсуждения, приведенных в разд. 15.3 монографии [297].

руемое вещество остается «оптически тонким» для этих фотонов и они уходят наружу на бесконечность, не задерживаясь рассеянием или поглощением.

Упражнение 14.20. Преобладающим источником непрозрачности для типичных фотонов с энергией $E \sim 10$ МэВ является комптоновское рассеяние на релятивистских электронах; сечение этого процесса равно $\sigma(E) \doteq \sigma_T(m_e c^2/E)$, где σ_T — томсоновское сечение. Покажите, что соответствующая оптическая толщина для рассеяния $\tau = \int\limits_{r_h}^{\infty} \sigma n_e dr$ гораздо меньше единицы при типичных межзвездных плотностях (т.е. $n_\infty \sim 1$ см$^{-3}$). Дайте интерпретацию полученного результата.

Примечательно, что выражение (14.4.16) дает очень малую эффективность преобразования энергии массы покоя в излучение

$$\varepsilon = \frac{L_{\text{ff}}}{\dot{M}c^2} \sim 6 \times 10^{-11}\left(\frac{n_\infty}{1\ \text{см}^{-3}}\right)\left(\frac{T_\infty}{10^4\ \text{K}}\right)^{-3/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right). \qquad (14.4.18)$$

Даже если вращающаяся черная дыра обладает максимально возможным моментом количества движения, эффективность сферически симметричной аккреции возрастает всего лишь на 15% по сравнению со значением, следующим из (14.4.18) [527].

Присутствие «запутанного» магнитного поля, приводящего к синхротронному излучению в дополнение к тормозному излучению, может в какой-то мере увеличить эффективность ([293, 402, 422, 526, 539], см. также упражнение 14.21). Однако в общем случае сферически симметричная аккреция межзвездного газа черными дырами оказывается *неэффективным* механизмом излучения. Таким образом, в этом случае положение совершенно иное по сравнению со сферической аккрецией на нейтронную звезду, где $\varepsilon \sim 0{,}1$, или с дисковой аккрецией на черную дыру, где $\varepsilon = 0{,}05$—$0{,}42$ в зависимости от величины момента количества движения дыры a/M и от направления вращения газового диска относительно дыры (см. разд. 14.5). При иных граничных условиях для газа вместо предполагавшихся типичных межзвездных параметров или при учете турбулентности эффективность может оказаться совсем другой. Однако для таких режимов в настоящее время нет надежных релятивистских расчетов.

Упражнение 14.21. Предположите, что аккрецируемый газ обладает равномерно распределенным магнитным полем

$$\frac{B^2}{8\pi} \sim \frac{GM\rho}{r}. \qquad (14.4.19)$$

Такое поле может образоваться, если в любом месте рост вмороженного хаотического поля, с которым сцеплена падающая плазма, ограничен *пересоединением* противоположно направленных радиальных силовых линий магнитного поля [526, 539]. Характерное время пересоединения определяется соотношением $t_{\text{recon}} \sim r/v_A$, где $v_A \sim (B^2/8\pi\rho)^{1/2}$ — альвеновская скорость, или магнитная «звуковая скорость». Усиление поля B ограничено условием $t_{\text{recon}} \sim t_{\text{ff}}$, где $t_{\text{ff}} \sim r/(GM/r)^{1/2}$ — время падения. Это условие и приводит к уравнению (14.4.19).

а) Подсчитайте синхротронную светимость L_{syn}, возникающую от вращения релятивистских электронов вокруг равномерно распределенных силовых линий.

Указание. $$\Lambda_{\text{syn}} = \frac{16}{3}\frac{e^2}{c}\left(\frac{eB}{m_e c}\right)^2\left(\frac{kT}{m_e c^2}\right)^2 n_e \text{ эрг/(см}^3 \cdot \text{с)}$$

Ответ: $$L_{\text{syn}} \sim 10^{27}(n_\infty/1 \text{ см}^{-3})^2(T_\infty/10^4\text{ K})^{-3}(M/M_\odot)^3 \text{ эрг/с}$$

Замечание: Расчеты в рамках общей теории относительности дают значения светимости, которые ниже более чем в десять раз.

б) Получите оценку характеристической частоты испускаемого излучения.

Указание: $h\nu \sim \hbar\omega_H \sim \hbar\left(\dfrac{eB\gamma^2}{m_e c}\right)$, где ω_H — синхротронная частота и где $\gamma \equiv E_e/m_e c^2$ удовлетворяет условию $\langle\gamma^2\rangle = 12kT/m_e c^2$ для теплового релятивистского электронного газа.

Ответ: $\nu \sim 10^{13}$ Гц, или $\lambda \sim 30$ мкм (инфракрасный диапазон).

14.5. ДИСКОВАЯ МОДЕЛЬ АККРЕЦИИ НА КОМПАКТНУЮ ЗВЕЗДУ

Аккреция на компактную звезду в двойной системе может сильно отличаться от сферически симметричной, поскольку аккрецируемый газ обладает моментом количества движения. Рассмотрим случай, когда компактный объект — это черная дыра. Если момент количества движения на единицу массы $\tilde{l}$ превосходит $r_I c$, где r_I — радиус самой внутренней устойчивой круговой орбиты (см. гл. 12), центробежные силы становятся значительными еще до того, как газ опустится под горизонт событий. В этом случае газ будет выброшен на круговые орбиты вокруг черной дыры. Движение газа внутрь возможно только после того, как вязкостные напряжения унесут лишний момент количества движения. Сопутствующий нагрев, вызванный силами трения, и более длительное пребывание газа вне горизонта событий приводят к значительному увеличению светимости по сравнению с величинами, рассчитанными в предыдущем разделе для сферически симметричной аккреции. Фактически полная энергия, излученная единицей массы по мере ее дрейфа через диск внутрь по направлению к черной дыре, должна быть равна гравитационной энергии связи единицы массы на внутреннем крае диска при $r = r_I$ (если предположить, что дополнительная энергия, излучаемая позже, когда масса быстро опускается с расстояния $r = r_I$ к горизонту событий, сравнительно невелика). Таким образом, га-