Глава 16

Гравитационное излучение

16.1. ЧТО ТАКОЕ ГРАВИТАЦИОННАЯ ВОЛНА?

В общей теории относительности гравитационные волны описываются в виде «ряби» на кривизне пространства-времени, распространяющейся со скоростью света. Представление о гравитационных волнах, как и о волнах на поверхности океана, связано с введением идеализированного понятия однородного невозмущенного «фона», в котором распространяются волны. Однако в отличие от океанских волн гравитационные волны не сопровождаются движением материальной среды — они представляют собой «рябь» на фоне геометрии пространства-времени.

Покинув источник («ближнюю зону»), волны обычно попадают в область, где их длина λ оказывается малой по сравнению с радиусом кривизны R окружающего пространства-времени, через которое они распространяются.

Упражнение 16.1. а) Покажите, что для самогравитирующих источников, характерное время колебаний которых определяется динамическими процессами, длина волны λ меняется от нескольких километров до нескольких астрономических единиц по мере того, как плотность меняется от значений, свойственных черным дырам, до значений, характерных для звезд.

Указание: вспомните уравнение (10.2.2).

б) Напряженность фонового гравитационного поля измеряется приливным гравитационным полем [см. уравнение (5.1.21)]

$$F_{\text{tid}} \sim \frac{M}{L^3}, \quad (c = G = 1). \tag{16.1.1}$$

Здесь M — масса источника гравитации, а L — характерный размер. Выражая эту мысль иначе, можно сказать, что радиус кривизны фонового поля равен

$$R \sim (F_{\text{tid}})^{-1/2}. \tag{16.1.2}$$

Покажите, что радиус кривизны в межгалактическом пространстве, в галактиках и Солнечной системе по порядку величины равен соответственно 10^{11}, 10^7 и 0,1 световых лет.

Большое значение R, полученное для Солнечной системы, — это просто иная формулировка утверждения, что гравитация в ней слабая. В Солнечной системе можно ввести координаты, почти совпадающие с координатами Минковского, так что

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{16.1.3}$$

Члены $h_{\mu\nu}$ содержат квазистатические вклады от Солнца, планет и т.п. (см. гл. 5), а также любые возможные гравитационные волны от астрономических источников. В нашем обсуждении мы не станем касаться квазистатических вкладов, а сосредоточим внимание на волновых составляющих $h_{\mu\nu}$. Как правило, мы будем приводить лишь конечные результаты, уделяя мало места их выводам[1].

Гравитационные волны полностью описываются двумя безразмерными амплитудами, скажем, h_+ и $h_\times$. Выберем направление распространения вдоль оси z. Тогда h_+ и $h_\times$ будут зависеть только от величины $(t - z/c)$. Если ввести *тензоры поляризации* $\underset{\sim}{\mathbf{e}}^+$ и $\underset{\sim}{\mathbf{e}}^\times$, обладающие свойствами

$$e^+_{xx} = -e^+_{yy} = 1,\ e^\times_{xy} = e^\times_{yx} = 1, \text{ остальные компоненты равны нулю,} \tag{16.1.4}$$

то можно записать выражение для гравитационной волны в виде

$$h^{TT}_{jk} = h_+ e^+_{jk} + h_\times e^\times_{jk}. \tag{16.1.5}$$

Это симметричный пространственный тензор со следом, равным нулю, поперечный к направлению распространения (z-компонент отсутствует). Тензор h^{TT}_{jk} оказывается аналогом векторного потенциала в электродинамике с лоренцевской калибровкой. В электродинамике для вакуума справедливы соотношения

$$A_0 = 0, \qquad A_{i,i} = 0, \qquad \Box A_i = 0, \tag{16.1.6}$$

последнее уравнение вытекает из максвелловских уравнений поля в данной калибровке. Здесь же получается

$$h^{TT}_{0\mu} = 0, \qquad h^{TT}_{jk,k} = 0, \qquad \Box h^{TT}_{jk} = 0, \tag{16.1.7}$$

в сочетании с условием, что след тензора равен нулю. Последнее уравнение — это уравнение поля Эйнштейна в данной калибровке. Система координат, в которой справедливы уравнения (16.1.7), называется в общей теории относительности *TT-калибровкой (TT* от transverse-traceless — поперечная, со следом, равным нулю. — *Перев.*).

Когда электромагнитная волна взаимодействует с заряженной частицей, она вызывает ее ускорение, перпендикулярное к направлению распространения волны (поперечное ускорение) и пропорциональное e/m — отношению заряда частицы к ее массе. Аналогично, когда гравитационная волна попадает на свободную частицу, она сообщает ей поперечное ускорение. Однако «гравитационный заряд» частицы (ее реакция на гравитационную силу) равен ее инертной массе (принцип эквивалентности). Таким образом,

---

[1] Детальное рассмотрение теории гравитационных волн приведено, например, в [411].

в общей теории относительности у всех частиц оказывается одно и то же гравитационное «e/m». Поэтому все свободные частицы, расположенные в одном и том же месте, испытывают одинаковое поперечное ускорение. Поскольку локальные инерциальные системы координат определяются свободно движущимися частицами, то и сами локальные инерциальные системы координат испытывают такое же ускорение. Поэтому в данном случае ускорение нельзя обнаружить *локально.* С другой стороны, ускорение различно в разных точках пространства-времени и это дает возможность регистрировать гравитационные волны. (Здесь мы просто высказали в иной форме утверждение, что «истинное» гравитационное поле — это поле приливных сил, которое может быть измерено только при нелокальном сравнении.)

Рассмотрим локальную инерциальную систему координат, связанную с пробной свободной частицей. Пусть в этой системе координат ξ_j — вектор, которым измеряется отклонение второй пробной частицы от опорной. Тогда проходящая гравитационная волна будет вызывать малое относительное ускорение частиц

$$\ddot{\xi}_j = \tfrac{1}{2}\ddot{h}^{TT}_{jk}\xi_k, \tag{16.1.8}$$

которое в свою очередь вызовет небольшое изменение расстояния между ними, равное

$$\delta\xi_j = \tfrac{1}{2}h^{TT}_{jk}\xi_k \tag{16.1.9}$$

По порядку величины *относительная деформация,* вызванная гравитационной волной, равна

$$\frac{\delta\xi}{\xi} \sim h, \tag{16.1.10}$$

Этот результат очень полезен для грубых оценок.

Отметим, что относительное ускорение (16.1.8) поперечно как в том смысле, что оно ортогонально к направлению распространения волны, так и потому, что оно равно нулю, если вектор ξ_j параллелен направлению распространения.

Упражнение 16.2. а) Рассмотрите плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси z с $h_+ \neq 0$, $h_\times = 0$. Покажите, что поле относительных ускорений имеет дивергенцию, равную нулю, и поэтому может быть представлено «силовыми линиями» подобно электрическому полю в вакууме.

б) Нарисуйте картину силовых линий и покажите, что она имеет квадрупольный характер, а расстояние между линиями уменьшается при удалении от начала координат.

Когда гравитационная волна попадает на объект, внутри которого действуют силы, разные части объекта не могут двигаться как свободные частицы. Вместо этого объект начинает колебаться в соответствии с обычными законами движения, причем колебания возбуждаются движущей силой гравитационной волны

$$F_j = \tfrac{1}{2} m \ddot{h}^{TT}_{jk} \xi_k \qquad (16.1.11)$$

действующей на каждый элемент с массой m. Здесь ξ_k — смещение элемента массы относительно центра масс.

Фактически выражения (16.1.8)—(16.1.11) справедливы только в том случае, когда величина смещения частиц $|\xi|$ мала по сравнению с длиной волны λ. Если это не так, эффекты запаздывания изменяют линейную зависимость от ξ_j на синусоидальную (см. [411], упражнение 37.6), приблизительно имеющую вид $\sin(2\pi|\xi|/\lambda)$.

Поскольку гравитационные волны могут возбуждать силы и производить работу, они должны нести энергию и импульс. Плотности энергии и импульсов *не могут* быть локализованы в точке (в точке нет гравитационных сил!), но *могут быть* локализованы в области размером порядка нескольких длин волн. Тензор энергии-импульса гравитационной волны, распространяющейся в направлении оси z, имеет отличные от нуля компоненты

$$T^{00} = \frac{T^{0z}}{c} = \frac{T^{zz}}{c^2} = \frac{1}{16\pi}\frac{c^2}{G}\left\langle \left(\dot{h}_+\right)^2 + \left(\dot{h}_\times\right)^2 \right\rangle, \qquad (16.1.12)$$

где угловые скобки означают усреднение по нескольким длинам волн. Здесь T^{00} — плотность энергии, T^{0z} — поток энергии (равный плотности импульса, умноженной на c^2), а T^{zz} — поток импульса.

16.2. ОБРАЗОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В случае электромагнетизма основная мода мультипольного излучения от нерелятивистской системы зарядов — дипольное излучение. Векторный потенциал в волновой зоне при лоренцевской калибровке имеет вид

$$A_j(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr}\dot{d}_j\left(t - \frac{r}{c}\right), \qquad (16.2.1)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$, а $\mathbf{d}$ — электрический дипольный момент. Электрические и магнитные поля (с пространственной зависимостью типа $1/r$), вычисленные на основе уравнения (16.2.1), зависят только от компонентов $\mathbf{d}$, *поперечных* направлению распространения $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$, так что член d_j в уравнении (16.2.1) можно заменить его поперечной составляющей

$$d_j^T \equiv P_{jk} d_k, \qquad (16.2.2)$$

где P_{jk} — проекционный оператор

$$P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k. \qquad (16.2.3)$$