ными законами движения, причем колебания возбуждаются движущей силой гравитационной волны

$$F_j = \tfrac{1}{2} m \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi_k \tag{16.1.11}$$

действующей на каждый элемент с массой m. Здесь ξ_k — смещение элемента массы относительно центра масс.

Фактически выражения (16.1.8)—(16.1.11) справедливы только в том случае, когда величина смещения частиц $|\xi|$ мала по сравнению с длиной волны λ. Если это не так, эффекты запаздывания изменяют линейную зависимость от ξ_j на синусоидальную (см. [411], упражнение 37.6), приблизительно имеющую вид $\sin(2\pi|\xi|/\lambda)$.

Поскольку гравитационные волны могут возбуждать силы и производить работу, они должны нести энергию и импульс. Плотности энергии и импульсов *не могут* быть локализованы в точке (в точке нет гравитационных сил!), но *могут быть* локализованы в области размером порядка нескольких длин волн. Тензор энергии-импульса гравитационной волны, распространяющейся в направлении оси z, имеет отличные от нуля компоненты

$$T^{00} = \frac{T^{0z}}{c} = \frac{T^{zz}}{c^2} = \frac{1}{16\pi}\frac{c^2}{G}\left\langle \left(\dot{h}_+\right)^2 + \left(\dot{h}_\times\right)^2 \right\rangle, \tag{16.1.12}$$

где угловые скобки означают усреднение по нескольким длинам волн. Здесь T^{00} — плотность энергии, T^{0z} — поток энергии (равный плотности импульса, умноженной на c^2), а T^{zz} — поток импульса.

16.2. ОБРАЗОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В случае электромагнетизма основная мода мультипольного излучения от нерелятивистской системы зарядов — дипольное излучение. Векторный потенциал в волновой зоне при лоренцевской калибровке имеет вид

$$A_j(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr}\dot{d}_j\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{16.2.1}$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$, а $\mathbf{d}$ — электрический дипольный момент. Электрические и магнитные поля (с пространственной зависимостью типа $1/r$), вычисленные на основе уравнения (16.2.1), зависят только от компонентов $\mathbf{d}$, *поперечных* направлению распространения $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$, так что член d_j в уравнении (16.2.1) можно заменить его поперечной составляющей

$$d_j^T \equiv P_{jk} d_k, \tag{16.2.2}$$

где P_{jk} — проекционный оператор

$$P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k. \tag{16.2.3}$$

Подставляя в вектор Пойнтинга выражения для полей **E** и **B**, полученные из (16.2.1), получаем угловое распределение потока

$$\frac{d^2E}{dt\,d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}_j^T \ddot{d}_j^T \qquad (16.2.4a)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{d}_j\ddot{d}_j - \left(n_j\ddot{d}_j\right)^2\right]. \qquad (16.2.4b)$$

Величину d_j следует вычислять с учетом времени запаздывания $t - r/c$. Выбирая направление оси z вдоль **n**, можно легко проинтегрировать уравнение (16.2.4б) по телесному углу, что дает

$$L_{\rm em} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3}\ddot{d}_j\ddot{d}_j. \qquad (16.2.5)$$

Записав $d_j = ex_j$ для точечного заряда, видим, что полученное выражение — это просто формула Лармора.

Теперь на основе соображений размерности можно было бы ожидать, что основной модой гравитационного излучения от источника с малыми внутренними скоростями также будет дипольное излучение

$$L_{\rm GW} \propto \frac{G}{c^3}\ddot{d}_j\ddot{d}_j, \qquad (16.2.6)$$

где гравитационный дипольный момент равен

$$d_j = \sum_A m_A x_j^A \qquad (16.2.7)$$

и в уравнении (16.2.5) член e^2 заменен на Gm^2. Однако уравнение (16.2.7) дает

$$\ddot{d}_j = \sum_A m_A \ddot{x}_j^A = \sum_A \dot{p}_j^A, \qquad (16.2.8)$$

где $\mathbf{p}^A$ — импульс A-й частицы. Поскольку полный импульс системы сохраняется, $\ddot{d}_j = 0$. В общей теории относительности дипольное излучение отсутствует.

Следующие моды мультипольного излучения — это магнитное дипольное и электрическое квадрупольное. Магнитный дипольный момент масс равен

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \frac{1}{c}\sum_A \mathbf{x}^A \times \left(m_A\dot{\mathbf{x}}^A\right) = \frac{1}{c}\sum_A \mathbf{j}^A, \qquad (16.2.9)$$

где $\mathbf{j}^A$ — момент количества движения A-й частицы. Ввиду сохранения момента количества движения $\dot{\boldsymbol{\mu}} = 0$. Таким образом, в общей теории относительности нет магнитно-дипольного излучения. Низшая мода излучения — электрическое *квадрупольное*.

Аналогом уравнения (16.2.1) служит

$$h_{jk}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\frac{G}{c^4}\ddot{I\!\!\!-}_{jk}^{TT}\left(t - \frac{r}{c}\right), \qquad (16.2.10)$$

где $I\!\!\!-$ — квадрупольный момент масс

$$I\!\!\!-_{jk} \equiv \sum_A m_A\left[x_j^A x_k^A - \frac{1}{3}\delta_{jk}(x^A)^2\right]. \qquad (16.2.11)$$

Как и в монографии Мизнера, Торна и Уилера [411], здесь используется перечеркивание символов, чтобы отличить принятое нами определение квадрупольного момента от других, имеющихся в литературе. Верхний индекс «TT» означает поперечную часть со следом, равным нулю:

$$I\!\!\!-_{jk}^{TT} \equiv P_{jl}P_{km}I\!\!\!-_{lm} - \tfrac{1}{2}P_{jk}(P_{lm}I\!\!\!-_{lm}). \qquad (16.2.12)$$

Отметим, что по порядку величины

$$h \sim \frac{r_{\mathrm{Sch}}}{r}\frac{v^2}{c^2}, \qquad (16.2.13)$$

где r_{Sch} — это «радиус Шварцшильда» для массы, участвующей в квадрупольном движении, а v — характерная скорость.

Поток энергии дается тензором энергии-импульса

$$T_{0r} = \frac{1}{32\pi}\frac{c^4}{G}\langle h_{jk,0}^{TT}h_{jk,r}^{TT}\rangle \qquad (16.2.14)$$

[сравните с уравнением (16.1.12)]. Подстановкой выражения (16.2.10) получим

$$\frac{d^2E}{dt\,d\Omega} = \frac{1}{8\pi}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I\!\!\!-}_{jk}^{TT}\dddot{I\!\!\!-}_{jk}^{TT}\rangle \qquad (16.2.15a)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\frac{G}{c^5}\left\langle \dddot{I\!\!\!-}_{jk}\dddot{I\!\!\!-}_{jk} - 2n_i\dddot{I\!\!\!-}_{ij}\dddot{I\!\!\!-}_{jk}n_k + \frac{1}{2}\left(n_j n_k \dddot{I\!\!\!-}_{jk}\right)^2\right\rangle, \qquad (16.2.15b)$$

[сравните с уравнениями (16.2.4а,б)]. Интегрируя по $\mathbf{n}$, получаем

$$L_{\mathrm{GW}} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I\!\!\!-}_{jk}\dddot{I\!\!\!-}_{jk}\rangle. \qquad (16.2.16)$$

Аналогичная электромагнитная формула имеет множитель 1/30 вместо 1/5, потому что там волны описываются векторными, а не тензорными полями.

Квадрупольная формула (16.2.16) с определением (16.2.11) справедлива для *медленно движущихся* источников ($v \ll c$) со *слабым внутренним гравитационным полем* (ньютоновский потенциал $\phi \ll c^2$). Другие случаи, для которых можно рассчитать гравитационное излучение, обсуждаются в [568].

Отметим, что отсутствие гравитационной «светимости» L_{GW} у сферически симметричных источников — это общий результат, следующий из теоремы Биркгофа (гл. 5).

Сила реакции излучения, соответствующая потерям энергии (16.2.16), может быть выражена в виде градиента потенциала ньютоновского типа

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{react})} = -m\nabla\Phi^{(\mathrm{react})}, \qquad \Phi^{(\mathrm{react})} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\not{I}^{(5)}_{jk}x_j x_k. \tag{16.2.17}$$

Здесь заключенный в скобки индекс «5» означает пятую производную по времени. Это выражение легко поддается проверке:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \sum_A \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F}_A^{(\mathrm{react})} \\ &= -\sum_A m_A v_{Aj}\frac{2}{5}\frac{G}{c^5}\not{I}^{(5)}_{jk}x_k^A \\ &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\not{I}^{(5)}_{jk}\frac{d}{dt}\sum_A m_A x_j^A x_k^A \\ &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\not{I}^{(5)}_{jk}\not{I}^{(1)}_{jk},\end{aligned} \tag{16.2.18}$$

где в последней строке использовано соотношение $\not{I}_{jk}\delta_{jk} = 0$. Усреднение по нескольким циклам (для периодического источника) или на интервале времени, достаточно большом по сравнению с характерным динамическим временем (для источника с ограниченным движением), позволяет дважды выполнить *интегрирование по частям и превратить* $\not{I}^{(5)}\not{I}^{(1)}$ в $\not{I}^{(3)}\not{I}^{(3)}$, *возвратившись* таким образом к уравнению (16.2.16).

Упражнение 16.3. Момент количества движения, уносимый гравитационными волнами, дается выражением

$$\frac{dJ_i}{dt} = \sum_A \varepsilon_{ijk}x_j^A F_k^{A(\mathrm{react})}. \tag{16.2.19}$$

Покажите, что отсюда следует

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{2}{5}\frac{G}{c^5}\varepsilon_{ijk}\langle \ddot{\not{I}}_{jm}\dddot{\not{I}}_{km}\rangle. \tag{16.2.20}$$

Обратите внимание, что момент количества движения не уносится, если источник осесимметричный; это результат, имеющий общий характер.
