16.3. ОЦЕНКИ ПО ПОРЯДКУ ВЕЛИЧИНЫ

Оценка амплитуды h гравитационной волны приведена выше [см. соотношение (16.2.13)]. Вычисляя dE/dt, заметим, что

$$\dddot{I\!\!\!-}_{jk} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{Mv^3}{R}, \qquad (16.3.1)$$

где M, R, T и v — соответственно характерные значения массы, размера, масштаба времени и скорости источника. Таким образом, из уравнения (16.2.16) следует

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{G}{c^5}\left(\frac{M}{R}\right)^2 v^6 \sim L_0\left(\frac{r_{\rm Sch}}{R}\right)^2\left(\frac{v}{c}\right)^6, \qquad (16.3.2)$$

где

$$L_0 \equiv \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59}\ \text{эрг/с}. \qquad (16.3.3)$$

Упражнение 16.4. Стальной стержень массой 10^5 кг и длиной 20 м вращается со скоростью, соответствующей пределу механической прочности (30 рад/с). Оцените $L_{\rm GW}$.

Ответ: $\sim 10^{-23}$ эрг/с.

Упражнение 16.5. Покажите, что

$$L_{\rm GW} \sim L_{\rm int}\frac{L_{\rm int}}{L_0}, \qquad (16.3.4)$$

где $L_{\rm int} \sim Mv^2/T$ — внутренняя мощность, связанная с квадрупольным движением.

Из уравнения (16.3.2) следует, что максимальная мощность гравитационного излучения достигается, когда $r_{\rm Sch} \sim R$ и $v \sim c$. *Поэтому компактные объекты — это важные потенциальные источники гравитационных волн.*

Астрофизические системы обычно гравитационно связаны, поэтому, согласно теореме вириала,

$$\text{Кинетическая энергия} \sim \frac{MR^2}{T^2} \sim \left|\begin{array}{c}\text{потенциальная}\\ \text{энергия}\end{array}\right| \sim \frac{GM^2}{R} \qquad (16.3.5)$$

или

$$T \sim \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}. \qquad (16.3.6)$$

Уравнение (16.3.6)—это соотношение между характерным временем и средней плотностью, с которыми нам неоднократно приходилось сталкиваться раньше. Исключая из уравнения (16.3.2) v/c, получаем

$$L_{\mathrm{GW}} \sim L_0\left(\frac{r_{\mathrm{Sch}}}{R}\right)^5. \tag{16.3.7}$$

Упражнение 16.6. Покажите, что энергия гравитационных волн, излучаемых несферической самогравитирующей системой, равна

$$\Delta E \sim L_{\mathrm{GW}} T \sim Mc^2\left(\frac{r_{\mathrm{Sch}}}{R}\right)^{7/2}. \tag{16.3.8}$$

Уравнения (16.3.7) и (16.3.8) еще раз подчеркивают важность компактных объектов как потенциальных источников гравитационных волн.

Эффективность излучения гравитационных волн можно параметризовать

$$\Delta E = \varepsilon Mc^2, \qquad \varepsilon \sim \left(\frac{r_{\mathrm{Sch}}}{R}\right)^{7/2}. \tag{16.3.9}$$

Тогда соотношения (16.2.13), (16.3.5) и (16.3.8) дают

$$h \sim \varepsilon^{2/7}\frac{r_{\mathrm{Sch}}}{r} \sim 3 \times 10^{-18}\left(\frac{\varepsilon}{0{,}1}\right)^{2/7}\frac{(M/M_\odot)}{(r/10\text{ кпс})}. \tag{16.3.10}$$

В соотношении (16.3.10) в качестве единицы измерения r взято расстояние до центра Галактики, и для нормировки ε выбрано оптимистическое значение 10%. Если при оценках используется полная масса системы, то в ε входят как степень несферичности, так и степень компактности.

Приведенные выше оценки относятся к энергии, излученной за характерное динамическое время T. Если система эволюционирует дальше, ε и ΔE будут соответственно бо́льшими, но h останется без изменения.

Упражнение 16.7. Покажите, что время затухания гравитационного излучения $\tau \sim E/(dE/dt)$ приблизительно равно

$$\tau \sim \frac{R}{c}\left(\frac{R}{r_{\mathrm{Sch}}}\right)^3. \tag{16.3.11}$$

Оцените τ для несферических белых карликов и нейтронных звезд. (Аналогичные соображения использовались в разд. 7.4 и 9.6, где доказывалось, что белым карликам и нейтронным звездам с $T/|W| \gtrsim 0{,}14$ должна быть свойственна вековая неустойчивость, вызванная гравитационным излучением.)

Ответ: Для белых карликов $\tau \lesssim 10^3$ лет; для нейтронных звезд $\tau \lesssim 300$ с.

Каковы шансы обнаружить гравитационные волны от астрофизического источника? Рассмотрим сильно асимметричный взрыв сверхновой в центре нашей Галактики, приводящий к образованию нейтронной звезды или черной дыры. Принимая $\varepsilon \sim 10\%$ и $M \sim M_{\odot}$, из соотношений (16.1.10) и (16.3.10) находим, что смещение конца полутораметрового стержня на Земле составит всего лишь

$$\Delta\xi \sim 5 \times 10^{-16} \text{ см}, \qquad (16.3.12)$$

или 1/200 ферми! Хотя и эта оценка не вселяет большого оптимизма, надо еще вспомнить [см. уравнение (1.3.27)], что события такого рода случаются примерно раз в 30 лет! Чтобы достичь более «сносной» скорости счета, скажем одного события в месяц, надо рассматривать все более удаленные галактики вплоть до скопления галактик в Деве (~ 20 Мпс), пока скорость вспышек сверхновых не станет достаточно высокой. Как следует из (16.3.10), это означает, что $h \lesssim 10^{-21}$.

Начало гравитационной астрономии положено работами Вебера [602]. Детектор Вебера в виде цилиндра изготовлен из материалов с высоким значением добротности Q, таких, как алюминий, сапфир, ниобий, и изолирован от всех возможных возмущений земного происхождения. Падающая гравитационная волна приводит к возбуждению в цилиндре основной моды колебаний, соответствующих резонансной частоте, и смещение цилиндра регистрируется соответствующим датчиком. (Вебер сначала использовал пьезоэлектрические кристаллы, размещенные на поверхности цилиндра.) Сигнал усиливается электронной схемой и анализируется в поисках свидетельства всплеска гравитационного излучения. Сравнивая сигналы от двух цилиндров, разнесенных на большие расстояния, можно более достоверно отождествить события внеземного происхождения.

Первые детекторы Вебера имели резонансную частоту в диапазоне нескольких килогерц, что соответствовало излучению от компактных объектов с массой порядка солнечной [см. уравнение (16.3.6)]. Чувствительность детекторов «первого поколения», изготовленных Вебером и другими исследователями, достигала $h \sim 10^{-16}$. Хотя Вебер и сообщал о регистрации заметного числа событий при такой чувствительности, ни одна из других групп не смогла подтвердить его данные, и сейчас общепринято считать, что эти события не были вызваны гравитационными волнами.

В настоящее время входят в строй детекторы «второго поколения», охлаждаемые до температур жидкого гелия и рассчитанные на чувствительность порядка $h \sim 10^{-19}$. Чтобы достичь чувствительности $h \sim 10^{-21}$, потребуется создать «третье поколение» детекторов, возможно, с охлаждением до температур порядка 0,001 К.

Другой перспективный путь разработки детекторов связан с использованием лазерных интерферометров. Проходящая гравитационная волна изменяет относительную длину оптических путей в плечах интерферометра, что возможно зафиксировать по возникающему сдвигу интерференционных полос. Форвард [201] создал прототип подобного прибора, имеющий чувствительность $h \sim 10^{-15}$. В настоящее время в ряде мест сооружаются более чувствительные детекторы и не исключено, что можно будет достичь чувствительности $h \sim 10^{-22}$. Интерферометры обладают определенным преимуществом перед резонансными системами, поскольку они регистрируют полный сигнал $h(t)$, а резонансная система фактически измеряет только фурье-компонент сигнала, соответствующий резонансной частоте.

Третий метод обнаружения гравитационных волн связан с очень точным доплеровским слежением с Земли за космическими аппаратами. Для этого случая интересны низкочастотные гравитационные волны в диапазоне 10^{-2} — 10^{-4} Гц. (Эти пределы определяются тем, что, с одной стороны, требуется около 100 с для точного считывания показаний атомных часов, а с другой стороны, вращение Земли не дает возможности проводить непрерывное слежение за аппаратом из одной точки.) Такие низкочастотные волны могли бы возникать при катастрофических событиях, например, излучаться сверхмассивными компактными объектами[1)].

16.4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим прежде всего случай, когда две точечные массы M_1 и M_2 находятся на круговой орбите радиусом a относительно друг друга. Если a_1 и a_2 — соответствующие расстояния до центра масс, то

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a, \tag{16.4.1}$$

где

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \tag{16.4.2}$$

— приведенная масса.

Если ось z совпадает с осью вращения, а ϕ — азимутальный угол между осью x и прямой, соединяющей массы, то

$$\not{I}_{xx} = \left(M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2\right)\cos^2\phi + \text{const}. \tag{16.4.3}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что величины $M_i a_i^2/3$ $(i = 1, 2)$ для каждой частицы постоянны. Уравнение (16.4.3) может быть переписано в виде

$$\not{I}_{xx} = \tfrac{1}{2}\mu a^2 \cos 2\phi + \text{const}. \tag{16.4.4}$$

Аналогично

$$\not{I}_{yy} = -\tfrac{1}{2}\mu a^2 \cos 2\phi + \text{const},$$

$$\not{I}_{xy} = \not{I}_{yx} = \tfrac{1}{2}\mu a^2 \sin 2\phi. \tag{16.4.5}$$

---

1) Дальнейшие подробности, касающиеся детектирования гравитационных волн, изложены в работе [568], где содержатся ссылки на дополнительную литературу.