ным преимуществом перед резонансными системами, поскольку они регистрируют полный сигнал $h(t)$, а резонансная система фактически измеряет только фурье-компонент сигнала, соответствующий резонансной частоте.

Третий метод обнаружения гравитационных волн связан с очень точным доплеровским слежением с Земли за космическими аппаратами. Для этого случая интересны низкочастотные гравитационные волны в диапазоне 10^{-2} — 10^{-4} Гц. (Эти пределы определяются тем, что, с одной стороны, требуется около 100 с для точного считывания показаний атомных часов, а с другой стороны, вращение Земли не дает возможности проводить непрерывное слежение за аппаратом из одной точки.) Такие низкочастотные волны могли бы возникать при катастрофических событиях, например, излучаться сверхмассивными компактными объектами[1)].

16.4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим прежде всего случай, когда две точечные массы M_1 и M_2 находятся на круговой орбите радиусом a относительно друг друга. Если a_1 и a_2 — соответствующие расстояния до центра масс, то

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a, \tag{16.4.1}$$

где

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \tag{16.4.2}$$

— приведенная масса.

Если ось z совпадает с осью вращения, а ϕ — азимутальный угол между осью x и прямой, соединяющей массы, то

$$I\!\!\!-_{xx} = \left(M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2\right)\cos^2\phi + \text{const}. \tag{16.4.3}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что величины $M_i a_i^2/3$ $(i = 1, 2)$ для каждой частицы постоянны. Уравнение (16.4.3) может быть переписано в виде

$$I\!\!\!-_{xx} = \tfrac{1}{2}\mu a^2 \cos 2\phi + \text{const}. \tag{16.4.4}$$

Аналогично

$$I\!\!\!-_{yy} = -\tfrac{1}{2}\mu a^2 \cos 2\phi + \text{const},$$

$$I\!\!\!-_{xy} = I\!\!\!-_{yx} = \tfrac{1}{2}\mu a^2 \sin 2\phi. \tag{16.4.5}$$

[1)] Дальнейшие подробности, касающиеся детектирования гравитационных волн, изложены в работе [568], где содержатся ссылки на дополнительную литературу.

Поскольку $\phi = \Omega t$, где Ω — орбитальная угловая скорость, находим

$$L_{\rm GW} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk}\rangle$$

$$= \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}(2\Omega)^6\left(\frac{1}{2}\mu a^2\right)\langle \sin^2 2\Omega t + \sin^2 2\Omega t + 2\cos^2 2\Omega t\rangle$$

$$= \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5}. \qquad (16.4.6)$$

Здесь учитывался третий закон Кеплера

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}, \qquad M \equiv M_1 + M_2. \qquad (16.4.7)$$

Потеря энергии приводит к сокращению расстояния a между массами и, следовательно, к уменьшению орбитального периода $P \equiv 2\pi/\Omega$. Поскольку энергия равна

$$E = \left(\frac{1}{2}M_1 a_1^2 + \frac{1}{2}M_2 a_2^2\right)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{a}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{a}, \qquad (16.4.8)$$

имеем

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2}\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^4}. \qquad (16.4.9)$$

Упражнение 16.8. Предположив, что приведенные выше выражения остаются справедливыми при $a \to 0$, покажите, что время t_0, необходимое для уменьшения a от начального значения $a_{\rm now}$ до нуля, равно

$$t_0 = \frac{5}{256}\frac{c^5}{G^3}\frac{a_{\rm now}^4}{M^2\mu}. \qquad (16.4.10)$$

Упражнение 16.9. Покажите, что по порядку величины t_0 [или $P/(dP/dt)$] определяется соотношением

$$\frac{t_0}{P} \sim 10^5\left(\frac{P}{1\,{\rm c}}\right)^{5/3} \qquad (16.4.11)$$

для $M_1 \sim M_2 \sim M_\odot$. [Этот результат был использован в уравнении (10.2.5), чтобы исключить интерпретацию пульсаров как двойных систем, состоящих из нейтронных звезд.]

Упражнение 16.10. Используя уравнение (16.2.20), покажите, что для круговых орбит

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^{7/2}}{c^5}\frac{\mu^2 M^{5/2}}{a^{7/2}}. \qquad (16.4.12)$$

Покажите, что

$$\frac{dE}{dt} = \Omega \frac{dJ}{dt}, \tag{16.4.13}$$

и, следовательно, круговая орбита остается круговой.

Если две массы находятся на *эллиптической* орбите с эксцентриситетом e, то [366, 455]

$$\frac{dE}{dt} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{e=0} f(e), \tag{16.4.14}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left.\frac{dJ}{dt}\right|_{e=0} g(e), \tag{16.4.15}$$

$$f(e) \equiv \left(1 + \tfrac{73}{24}e^2 + \tfrac{37}{96}e^4\right)\left(1 - e^2\right)^{-7/2}, \tag{16.4.16}$$

$$g(e) \equiv \left(1 + \tfrac{7}{8}e^2\right)\left(1 - e^2\right)^{-2}. \tag{16.4.17}$$

Здесь dE/dt и dJ/dt усреднены по орбите. Поскольку выражения (16.4.7) и (16.4.8) справедливы и для эллиптических орбит, уравнение (16.4.9) примет вид

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^4} f(e). \tag{16.4.18}$$

Упражнение 16.11. Используя соотношение для эллиптической орбиты

$$e^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{G^2\mu^3M^2}, \tag{16.4.19}$$

получите оценку изменения эксцентриситета de/dt, связанного с гравитационным излучением, и покажите, что $de/dt < 0$: реакция гравитационного излучения стремится *округлить* эллиптическую орбиту.

16.5. ПУЛЬСАР PSR 1913 + 16, ВХОДЯЩИЙ В ДВОЙНУЮ СИСТЕМУ

В настоящее время наиболее убедительное свидетельство существования гравитационных волн следует из изучения орбиты первого пульсара, открытого в составе двойной системы. Учитывая важность этого объекта, опишем его свойства подробнее.

Пульсар PSR 1913 + 16, входящий в двойную систему, был открыт Халсом и Тейлором в 1974 г. [287]. Авторы быстро поняли, что наблюдаемые изменения частоты пульсара можно объяснить эффектом Доплера,