

Покажите, что

$$\frac{dE}{dt} = \Omega \frac{dJ}{dt}, \quad (16.4.13)$$

и, следовательно, круговая орбита остается круговой.

Если две массы находятся на *эллиптической* орбите с эксцентриситетом  $e$ , то [366, 455]

$$\frac{dE}{dt} = \left. \frac{dE}{dt} \right|_{e=0} f(e), \quad (16.4.14)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left. \frac{dJ}{dt} \right|_{e=0} g(e), \quad (16.4.15)$$

$$f(e) \equiv \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)(1 - e^2)^{-7/2}, \quad (16.4.16)$$

$$g(e) \equiv \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right)(1 - e^2)^{-2}. \quad (16.4.17)$$

Здесь  $dE/dt$  и  $dJ/dt$  усреднены по орбите. Поскольку выражения (16.4.7) и (16.4.8) справедливы и для эллиптических орбит, уравнение (16.4.9) примет вид

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M^2 \mu}{a^4} f(e). \quad (16.4.18)$$

*Упражнение 16.11.* Используя соотношение для эллиптической орбиты

$$e^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{G^2 \mu^3 M^2}, \quad (16.4.19)$$

получите оценку изменения эксцентриситета  $de/dt$ , связанного с гравитационным излучением, и покажите, что  $de/dt < 0$ : реакция гравитационного излучения стремится *округлить* эллиптическую орбиту.

## 16.5. ПУЛЬСАР PSR 1913 + 16, ВХОДЯЩИЙ В ДВОЙНУЮ СИСТЕМУ

В настоящее время наиболее убедительное свидетельство существования гравитационных волн следует из изучения орбиты первого пульсара, открытого в составе двойной системы. Учитывая важность этого объекта, опишем его свойства подробнее.

Пульсар PSR 1913 + 16, входящий в двойную систему, был открыт Халсом и Тейлором в 1974 г. [287]. Авторы быстро поняли, что наблюдаемые изменения частоты пульсара можно объяснить эффектом Доплера,

вызванным орбитальным движением нейтронной звезды вокруг невидимого компонента двойной системы с периодом около 8 ч. Сообщение об открытии высокоточных часов — пульсара, движущегося со скоростью  $\sim 300$  км/с в гравитационном поле другого компонента, вызвало бурю активности среди специалистов, занимающихся теорией относительности. Природа предоставила нам полигон для проверки различных релятивистских эффектов. На практике эти эффекты обнаруживаются на основе изучения *моментов прихода* импульсов от пульсара [72, 184]. Ниже будет дано упрощенное описание, основанное на *периоде повторения* импульсов.

Пусть масса пульсара равна  $M_1$ , а масса другого компонента системы —  $M_2$ . Если предположить, что объекты сферически симметричны, то в первом приближении (ньютоновский закон тяготения) они движутся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Пусть  $i$  — наклонение орбитальной плоскости к лучу зрения (рис. 16.1). Выберем направление оси  $x$  вдоль «линии узлов», т.е. вдоль проходящей через начало координат прямой, по которой орбитальная плоскость пересекается с плоскостью, перпендикулярной лучу зрения. Пусть  $\omega$  — угловое расстояние периастра от узла, измеренное в плоскости орбиты. Тогда положение пульсара в любой момент времени задается соотношениями

$$x = r_1 \cos \psi, \quad y = r_1 \sin \psi, \quad (16.5.1)$$

где

$$\psi = \omega + \phi, \quad r_1 = \frac{a_1(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}. \quad (16.5.2)$$

Угол  $\phi$  (измеряемый от периастра) в небесной механике называется *истинной аномалией*.

Отношение периодов следования импульсов, принимаемых на Земле  $(\delta t)_{\text{rec}}$  и испускаемых пульсаром  $(\delta t)_{\text{em}}$ , может быть записано в виде

$$\frac{(\delta t)_{\text{rec}}}{(\delta t)_{\text{em}}} = \frac{(\delta t)_{\text{rec}}}{(\delta t)_{\text{stat}}} \frac{(\delta t)_{\text{stat}}}{(\delta t)_{\text{em}}}, \quad (16.5.3)$$

где индекс «stat» означает наблюдателя, неподвижного относительно центра масс и находящегося вблизи пульсара. Предположим на мгновение, что приемник (на Земле) тоже неподвижен относительно центра масс. Тогда, если  $r$  — расстояние между  $M_1$  и  $M_2$ , то

$$\frac{(\delta t)_{\text{rec}}}{(\delta t)_{\text{stat}}} = \left(1 - \frac{GM_2}{rc^2}\right)^{-1}, \quad (16.5.4)$$

согласно формуле гравитационного красного смещения (5.4.2). Формула Доплера дает

$$\frac{(\delta t)_{\text{stat}}}{(\delta t)_{\text{em}}} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}}{c}\right), \quad (16.5.5)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный с Земли на излучающий пульсар.

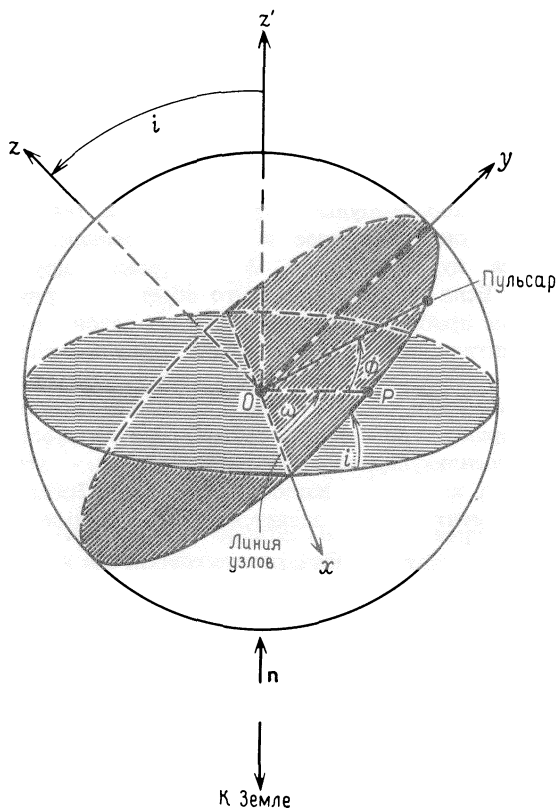


Рис. 16.1. Орбита пульсара в двойной системе. Точка  $O$  лежит в центре масс двойной системы, а точка  $P$  — в периастре пульсара. «Линия узлов»  $Ox$  проходит через точку  $O$  вдоль пересечения орбитальной плоскости с плоскостью, перпендикулярной лучу зрения (см. текст).

Итак, уравнение (16.5.3) с точностью до членов порядка  $v^2$  и  $M/r$  принимает вид

$$\frac{(\delta t)_{\text{rec}}}{(\delta t)_{\text{em}}} = 1 + \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}}{c} + \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{GM_2}{rc^2}. \quad (16.5.6)$$

Теперь запишем

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{z'} = \cos i \mathbf{e}_z + \sin i \mathbf{e}_y, \quad (16.5.7)$$

(см. рис. 16.1). Таким образом, выражения (16.5.1) дают

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = (\dot{r}_1 \sin \psi + r_1 \dot{\psi} \cos \psi) \sin i. \quad (16.5.8)$$

Используя выражения (16.5.2) и второй закон Кеплера, записанный в виде

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{P(1-e^2)^{3/2}}(1 + e \cos \phi)^2, \quad (16.5.9)$$

после простых алгебраических преобразований найдем, что

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = K [\cos(\omega + \phi) + e \cos \omega], \quad (16.5.10)$$

$$K \equiv \frac{2\pi a_1 \sin i}{P(1-e^2)^{1/2}}. \quad (16.5.11)$$

До сих пор наш анализ был аналогичным рассмотрению спектрально-двойных звезд с неразделяющимися спектральными линиями. Важное отличие состоит здесь в том, что величина  $(\delta t)_{\text{ем}}$ , которую нельзя получить из наблюдений спектральных линий, остается неизвестной. Поэтому любой *постоянный* член в правой части уравнения (16.5.6) не может быть измерен: он просто «поглощается» членом  $(\delta t)_{\text{ем}}$ . В частности, невозможно определить постоянную скорость центра масс Солнечной системы относительно центра масс системы пульсара. (Движение Земли по околосолнечной орбите приводит к эффекту Доплера, который исключается учетом известной скорости этого движения.)

Из доплеровского члена первого порядка можно найти параметры  $e$  и  $P$  посредством уравнения (16.5.9), которое после интегрирования дает  $\phi(t)$ . Кроме того, используя независимые, переменные во времени члены уравнения (16.5.10), пропорциональные  $\cos \phi$  и  $\sin \phi$ , можно определить  $K$  и  $\omega$ . Зная  $K$ , получаем  $a_1 \sin i$ , а из  $P$  и  $a_1 \sin i$  обычным путем выводится функция масс

$$f \equiv \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{G} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2 \quad (16.5.12)$$

Высокая точность измерения моментов прихода импульсов от пульсара позволяет оценить также члены уравнения (16.5.6), представляющие поперечный доплеровский сдвиг и гравитационное красное смещение. Найдем

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}^2 \\ &= \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2 \frac{a_1^2}{1-e^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2), \end{aligned} \quad (16.5.13)$$

и

$$\frac{GM_2}{r} = \frac{GM_2^2}{(M_1 + M_2)r_1}. \quad (16.5.14)$$

Таким образом, с учетом третьего закона Кеплера

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2 a_1^3}, \quad (16.5.15)$$

получим

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{GM_2}{r} = \beta \cos \phi + \text{const}, \quad (16.5.16)$$

где

$$\beta \equiv \frac{GM_2^2(M_1 + 2M_2)e}{(M_1 + M_2)^2 a_1(1 - e^2)}. \quad (16.5.17)$$

Как можно было предвидеть исходя из теоремы вириала, доплеровский сдвиг второго порядка и гравитационное красное смещение дают величину, доступную измерению. Отметим, однако, что зависимость от времени в уравнении (16.5.16) имеет тот же самый вид, что для члена первого порядка  $K \cos \omega \cos \phi$  в уравнении (16.5.10). Для чисто эллиптического движения величину  $\beta$  измерить нельзя [71, 90].

К счастью, нас спасает общая теория относительности. Орбита пульсара несколько отличается от точного эллипса. Существует смещение периастро, даваемое выражением<sup>1)</sup>

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi GM_2}{a_1(1 - e^2)Pc^2}. \quad (16.5.18)$$

Измеренное значение  $\dot{\omega}$  для пульсара в двойной системе составляет около  $4,2^\circ$  в год (сравните со смещением  $43''$  в столетие для Меркурия!). Таким образом, если положить  $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t$  в уравнении (16.5.10), то теперь появятся четыре независимые, изменяющиеся со временем тригонометрические комбинации  $\phi$  и  $\dot{\omega}t$ . Следовательно, на интервалах времени порядка нескольких лет можно разделить  $K$ ,  $\omega_0$ ,  $\dot{\omega}$  и  $\beta$ . В частности, в  $\dot{\omega}$  и  $\beta$  входят две *разные* комбинации четырех параметров  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $a_1$  и  $\sin i$  из функции масс, а также  $a_1 \sin i$ . Итак, измерения  $\dot{\omega}$  и  $\beta$  позволяют получить полное решение для параметров двойной системы.

Вспомним теперь уравнение (16.4.18) для скорости изменения периода  $\dot{P}$  двойной системы. Зная все параметры системы, можно *предсказать* величину  $\dot{P}$ . Если это предсказание согласуется с измерениями, то существование гравитационных волн подтверждается!

Тут у читателя могут возникнуть сомнения. В конце концов можно предсказать и другие эффекты типа потери массы системой или, наоборот,

<sup>1)</sup> Это выражение, выведенное впервые Робертсоном [484], справедливо независимо от того, сравнима пробная масса  $M_1$  с массой  $M_2$ , как в случае Меркурия и Солнца, или нет.

аккреции вещества, которые будут приводить к увеличению или уменьшению орбитального периода. Аналогично и смещение периастра не обязательно следует полностью приписывать эффектам общей теории относительности. Если звезда — компаньон пульсара окажется несферической вследствие вращения или же приливного воздействия пульсара, то квадрупольное гравитационное поле этого компонента двойной системы также может вызывать смещение периастра.

Предположим, однако, что величина  $\dot{P}$  измерена и что она согласуется с предсказанным значением, полученным при учете одних лишь эффектов общей теории относительности. Было бы чудом, если бы общая теория относительности давала неверное предсказание  $\dot{P}$ , но существовал другой источник  $\dot{\omega}$  и/или  $\dot{P}$ , влияние которого компенсировало бы ошибку таким образом, чтобы дать *точно* измеренную величину. Поскольку физики не верят в чудеса, мы приходим к заключению, что предсказания общей теории относительности подтверждаются и что мы наблюдаем реальный эффект гравитационного излучения.

По мере повышения точности при наблюдении моментов прихода импульсов появится возможность измерять другие релятивистские эффекты. Один из них состоит в изменении временной задержки сигналов, которые на своем пути к Земле пересекают орбиту в различных точках; такой эффект уже измерялся [524] для космических аппаратов в Солнечной системе. Кроме того, существует ряд различных постньютоновских периодических отклонений от эллиптического движения, еще не проверенных в Солнечной системе. В общей теории относительности каждый из этих членов содержит определенную известную комбинацию параметров  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $a_1$  и  $\sin i$ . По мере измерений все большего числа таких членов (а похоже, что скоро такие измерения будут возможны), дающих результаты, совпадающие с предсказаниями общей теории относительности, доказательства справедливости общей теории относительности и существования гравитационных волн будут все более обоснованными.

Пульсар, входящий в двойную систему, наблюдается Тейлором и его сотрудниками со времени открытия в 1974 г., причем точность измерений все увеличивалась. Последние значения параметров системы приведены в табл. 16.1. Величина  $\gamma$  связана с  $\beta$  соотношением

$$\gamma \equiv \frac{\beta P(1 - e^2)}{2\pi c^2}. \quad (16.5.19)$$

Эффект временной задержки и постньютоновские орбитальные эффекты находятся сейчас почти на пределе обнаружения. Никаких параметров, соответствующих этим эффектам, в табл. 16.1 не приведено.

Отметим, что выражение (16.5.18) может быть переписано с учетом (16.5.12) в виде

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi GM_2 \sin i}{a_1 \sin i (1 - e^2) P c^2} = \frac{3G^{2/3} (M_1 + M_2)^{2/3}}{(1 - e^2) c^2} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{5/3}. \quad (16.5.20)$$

Таблица 16.1

ПАРАМЕТРЫ ПУЛЬСАРА  
В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ <sup>1)</sup>

Параметр	Значение
$P_p$ , с	0,0590299952709(20)
$\dot{P}_p$ , $10^{-18}$	8,628(20)
$\ddot{P}_p$ , $10^{-30}$ с <sup>-1</sup>	-58(1200)
$(a_1 \sin i)/c$ , с	2,34186(24)
$e$	0,617139(5)
$P$ , с	27906,98161(3)
$\omega$ (град/год)	178,8656(15)
$T_0$ , Ю. Д.	2442321,4332092(15)
$\dot{\omega}$ (град/год)	4,2261(7)
$\gamma$ , с	0,00438(24)
$\dot{P}$ , $10^{-12}$	-2,30(22)

<sup>1)</sup> Взято из работы [562].  $P_p$  — период пульсара,  $P$  — орбитальный период,  $T_0$  — эпоха, или начало отсчета времени измерений. Числа в скобках соответствуют оценкам неопределенностей последних значащих цифр.

Используя измеренное значение  $\dot{\omega}$  из табл. 16.1 вместе со значениями  $P$  и  $e$ , находим

$$M_1 + M_2 = 2.8278(7)M_\odot. \quad (16.5.21)$$

Подчеркнем, что здесь не следует употреблять отдельно величины  $G$  и  $M_\odot$  в единицах СГС<sup>1)</sup>. Гравитационная постоянная известна с точностью хуже четырех значащих цифр. Величина  $GM_\odot/c^3 = 4,925490 \cdot 10^{-6}$  с известна гораздо более точно, так что значение  $(M_1 + M_2)$  можно намного точнее выразить в солнечных массах, нежели в граммах!

Перепишем теперь менее точно измеренные параметры  $\gamma$ ,  $\sin i$  и  $\dot{P}$ , подставляя численные значения  $P$ ,  $e$ ,  $a_1 \sin i$  и  $M_1 + M_2$ . Выражение (16.5.19) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{G^{2/3}M_2(M_1 + 2M_2)e}{(M_1 + M_2)^{4/3}c^2} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{1/3} \\ &= (0,0007344 \text{ с})M_2(2,8278 + M_2), \end{aligned} \quad (16.5.22)$$

<sup>1)</sup> По этой причине значения, которые следуют из табл. 16.1, слегка отличаются от приведенных в [562].

где величина  $M_2$  измерена в солнечных массах. Уравнение (16.5.15) дает

$$\sin i = \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{2/3} \frac{(M_1 + M_2)^{2/3} a_1 \sin i}{G^{1/3} M_2} = \frac{1,019}{M_2}, \quad (16.5.23)$$

а из уравнения (16.4.18) следует

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{-192\pi}{5} \frac{G^{5/3} M_1 M_2 f(e)}{c^5 (M_1 + M_2)^{1/3}} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{5/3} \\ &= -1,202 \times 10^{-12} M_2 (2,8278 - M_2). \end{aligned} \quad (16.5.24)$$

Отметим, что по порядку величины  $\Delta P \sim 10^{-4}$  с/год. Учитывая, что пульсар в двойной системе находится от нас на расстоянии около 5 кпс, приходится поражаться, что точность синхронизации времени прихода импульсов позволяет планировать измерения столь малого эффекта!

Принимая  $\gamma = (0,00438 \pm 0,00024)$  с, из выражения (16.5.22) находим, что  $M_2 = (1,41 \pm 0,06)M_\odot$  и, следовательно, согласно (16.5.21),  $M_1$  имеет такое же значение. Тогда уравнение (16.5.24) предсказывает  $\dot{P} = -2,40 \times 10^{-12}$  в отличном согласии с измеренной величиной  $(-2,30 \pm 0,22) \times 10^{-12}$ .

Пока что представляется, что общая теория относительности вполне позволяет объяснить поведение пульсара в двойной системе и что квадрупольная формула излучения гравитационных волн подтверждается в пределах ошибок измерений  $\sim 10\%$ . Эти ошибки должны в значительной степени уменьшаться по мере продолжения измерений орбитального периода. Итоги нашего обсуждения приводятся в резюме 16.1.

Эта демонстрация существования гравитационных волн в случае подтверждения будет иметь такое же значение, что и опыт Герца, подтвердивший предсказание электромагнитных волн Максвеллом. Правда, в отличие от опыта Герца условия данного эксперимента мы контролировать не можем. Просто нам повезло, что природа снабдила нас подходящей лабораторией.

#### РЕЗЮМЕ 16.1

*Пульсар PSR 1913 + 16 в двойной системе — гравитационные волны существуют!*

1. Двойная система состоит из пульсара, движущегося по эллиптической орбите, и ненаблюдаемого главного компонента. Пульсар обладает орбитальной скоростью около 300 км/с. Изменения моментов прихода импульсов на Землю обеспечивают информацию об орбите.

2. Систему характеризуют четыре основных параметра: массы  $M_1$  и  $M_2$ ;  $a_1$  — главная полуось орбиты пульсара относительно центра масс (причем  $M_2 a_2 = M_1 a_1$ ) и  $i$  — наклонение плоскости орбиты к лучу зрения.



3. Две комбинации этих параметров,  $a_1 \sin i$  и функция масс, измеряются по ньютоновским эффектам в пренебрежении членами порядка  $v/c$ .

4. Общая теория относительности в настоящее время дает возможность измерить еще три комбинации параметров: одну по смещению периастра, одну из комбинации доплеровского сдвига второго порядка и гравитационного красного смещения и одну по затуханию орбитального движения, вызванному излучением гравитационных волн.

5. Указанные пять соотношений между четырьмя параметрами хорошо согласуются между собой, что подтверждает существование гравитационных волн и говорит об отсутствии возможных возмущающих влияний на систему, которые могли бы усложнить интерпретацию данных. В частности, квадрупольная формула излучения гравитационных волн, основанная на общей теории относительности, подтверждается с точностью на уровне ошибок современных измерений порядка 10%.

6. С повышением точности наблюдений прихода импульсов измерениям станут доступны другие релятивистские эффекты и могут быть подтверждены дополнительные соотношения между указанными четырьмя параметрами.

## 16.6. ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС:

### ЗАМЕДЛЕНИЕ ПУЛЬСАРОВ

Осесимметричный объект, вращающийся как твердое тело вокруг оси симметрии, не обладает переменным во времени квадрупольным (или более высокого порядка) моментом и потому не должен излучать гравитационные волны.

Пусть главные моменты инерции объекта равны  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . Тогда излучение возникнет, если объект вращается вокруг главной оси  $\mathbf{e}_3$  и оказывается неосесимметричным ( $I_1 \neq I_2$ ). Однако он может излучать и будучи осесимметричным объектом при условии, что ось вращения не совпадает с осью симметрии  $\mathbf{e}_3$ . В общем случае излучать может несимметричный объект, вращающийся вокруг произвольной оси.

Рассмотрим вначале случай  $I_1 \neq I_2$  с вращением вокруг  $\mathbf{e}_3$ . Возможным физическим аналогом будет пульсар, жесткая кора которого способна выдержать «гору». Система координат  $x'_i$ , вращающаяся вместе с объектом, связана с инерциальной системой координат вращательной матрицей (обе системы обладают общим началом координат, совпадающим с центром масс):

$$x' = Rx, \quad (16.6.1)$$

где

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16.6.2)$$