3. Две комбинации этих параметров, $a_1 \sin i$ и функция масс, измеряются по ньютоновским эффектам в пренебрежении членами порядка v/c.

4. Общая теория относительности в настоящее время дает возможность измерить еще три комбинации параметров: одну по смещению периастра, одну из комбинации доплеровского сдвига второго порядка и гравитационного красного смещения и одну по затуханию орбитального движения, вызванному излучением гравитационных волн.

5. Указанные пять соотношений между четырьмя параметрами хорошо согласуются между собой, что подтверждает существование гравитационных волн и говорит об отсутствии возможных возмущающих влияний на систему, которые могли бы усложнить интерпретацию данных. В частности, квадрупольная формула излучения гравитационных волн, основанная на общей теории относительности, подтверждается с точностью на уровне ошибок современных измерений порядка 10%.

6. С повышением точности наблюдений прихода импульсов измерениям станут доступны другие релятивистские эффекты и могут быть подтверждены дополнительные соотношения между указанными четырьмя параметрами.

16.6. ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС: ЗАМЕДЛЕНИЕ ПУЛЬСАРОВ

Осесимметричный объект, вращающийся как твердое тело вокруг оси симметрии, не обладает переменным во времени квадрупольным (или более высокого порядка) моментом и потому не должен излучать гравитационные волны.

Пусть главные моменты инерции объекта равны I_1, I_2 и I_3. Тогда излучение возникнет, если объект вращается вокруг главной оси $\mathbf{e}_3$ и оказывается неосесимметричным ($I_1 \neq I_2$). Однако он может излучать и будучи осесимметричным объектом при условии, что ось вращения не совпадает о осью симметрии $\mathbf{e}_3$. В общем случае излучать может несимметричный объект, вращающийся вокруг произвольной оси.

Рассмотрим вначале случай $I_1 \neq I_2$ с вращением вокруг $\mathbf{e}_3$. Возможным физическим аналогом будет пульсар, жесткая кора которого способна выдержать «гору». Система координат x'_i, вращающаяся вместе с объектом, связана с инерциальной системой координат вращательной матрицей (обе системы обладают общим началом координат, совпадающим с центром масс):

$$x' = Rx, \tag{16.6.1}$$

где

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16.6.2}$$

и $\phi = \Omega t$, $\Omega = \text{const}$ (вращательные моменты отсутствуют). Тензор инерции в инерциальной системе координат имеет компоненты, определяемые соотношением

$$I = R^T I' R, \tag{16.6.3}$$

где I' — диагональная матрица с диагональными элементами I_1, I_2 и I_3. Будем использовать индексы 1, 2, 3 для обозначения компонентов в системе отсчета, связанной с объектом, а x, y, z — для инерциальной системы координат. Уравнения (16.6.2) и (16.6.3) дают

$$I_{xx} = \cos^2\phi\, I_1 + \sin^2\phi\, I_2 = \tfrac{1}{2}\cos 2\phi (I_1 - I_2) + \text{const}. \tag{16.6.4}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \tfrac{1}{2}\sin 2\phi (I_1 - I_2), \\ I_{yy} &= \tfrac{1}{2}\cos 2\phi (I_2 - I_1) + \text{const}, \\ I_{zz} &= \text{const}, \qquad I_{xz} = I_{yz} = 0. \end{aligned} \tag{16.6.5}$$

Поскольку

$$\operatorname{Tr} I' = \operatorname{Tr} I = I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}, \tag{16.6.6}$$

можно использовать I_{ij} вместо $\not{I}_{ij}$ в формуле потерь энергии (16.2.16) (вспомните, что $\not{I}_{ij} = -I_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\operatorname{Tr} I$). Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I}_{xx}^2 + 2\dddot{I}_{xy}^2 + \dddot{I}_{yy}^2 \rangle \\ &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\frac{1}{4}(2\Omega)^6 (I_1 - I_2)^2 \langle \cos^2 2\phi + 2\sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi \rangle \\ &= -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}(I_1 - I_2)^2 \Omega^6. \end{aligned} \tag{16.6.7}$$

Если объект может быть аппроксимирован однородным эллипсоидом с полуосями a, b, c, тогда

$$I_1 = \tfrac{1}{5}M(b^2 + c^2), \quad I_2 = \tfrac{1}{5}M(a^2 + c^2), \quad I_3 = \tfrac{1}{5}M(a^2 + b^2). \tag{16.6.8}$$

В случае малой асимметрии (т.е. $a \approx b$) можно записать

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5} I_3^2 \varepsilon^2 \Omega^6, \tag{16.6.9}$$

где эллиптичность ε определяется соотношением

$$\varepsilon \equiv \frac{a - b}{(a + b)/2}. \tag{16.6.10}$$

Эта формула приводилась ранее как выражение (10.5.15).

Теперь обратимся к случаю твердотельного вращения вокруг неглавной оси, но для простоты предположим, что $I_1 = I_2$. Выберем фиксированное направление момента количества движения, так чтобы вектор $\mathbf{J}$ в инерциальной системе координат был направлен вдоль $\mathbf{e}_z$. Преобразование к координатам, связанным с объектом, выполняется при помощи углов Эйлера (см. [232], уравнение 4.46):

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{16.6.11}$$

При свободной прецессии ось симметрии $\mathbf{e}_3$ и вектор угловой скорости вращаются вокруг $\mathbf{e}_z$ с постоянной угловой скоростью $\dot{\phi} = J/I_1$, причем угол θ между $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_z$ сохраняется постоянным. Кроме того, вектор угловой скорости прецессирует относительно $\mathbf{e}_3$ с угловой скоростью $\dot{\psi} = (I_1 - I_3)\dot{\phi}\cos\theta/I_3$, которая оказывается постоянной в системе координат, связанной с телом.

Уравнения (16.6.3) и (16.6.11) дают

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_1(\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi) + I_3\sin^2\theta\sin^2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\theta\cos^2 2\phi + \text{const}. \end{aligned} \tag{16.6.12}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \tfrac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\theta\sin 2\phi, \\ I_{xz} &= I_{zx} = -(I_1 - I_3)\sin\theta\cos\theta\sin\phi, \\ I_{yy} &= -\tfrac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\theta\cos 2\phi + \text{const}, \\ I_{yz} &= I_{zy} = (I_1 - I_3)\sin\theta\cos\theta\cos\phi, \\ I_{zz} &= I_3 + (I_1 - I_3)\sin^2\theta = \text{const}. \end{aligned} \tag{16.6.13}$$

полагая $\phi = \Omega t$, $\Omega = \dot{\phi} = \text{const}$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I}_{xx}^2 + \dddot{I}_{yy}^2 + 2\dddot{I}_{xy}^2 + 2\dddot{I}_{xz}^2 + 2\dddot{I}_{yz}^2 \rangle \\ &= -\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}(I_1 - I_3)^2\langle \tfrac{1}{4}\sin^4\theta(2\Omega)^6(2\cos^2 2\phi + 2\sin^2 2\phi) + \\ &\qquad + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\Omega^6(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\rangle \\ &= -\frac{2}{5}\frac{G}{c^5}(I_1 - I_3)^2\Omega^6\sin^2\theta(16\sin^2\theta + \cos^2\theta). \end{aligned} \tag{16.6.14}$$

Для малого «угла качания» θ получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{5}\frac{G}{c^5}(I_1 - I_3)^2\Omega^6\theta^2. \tag{16.6.15}$$

Отметим, что при вращении вокруг главной оси [уравнение (16.6.7) или (16.6.9)] частота излучения составляет 2Ω , что ясно из уравнений (16.6.4) и (16.6.5). Однако в случае, описываемом уравнением (16.6.15), преобладает излучение на частоте Ω, поскольку учет I_{xz} и I_{yz} приводит к появлению члена $\cos^2\theta$ в уравнении (16.6.14).

Для обнаружения гравитационных волн от пульсара (например, от пульсара в Крабовидной туманности или в созвездии Парусов) предлагалось построить резонансный детектор, тщательно настроенный на соответствующую частоту, которая хорошо известна из радионаблюдений. Если излучение вызвано существованием «горы» на поверхности пульсара и ось вращения совпадает с главной осью, то эту идею можно реализовать, выбрав резонансную частоту равной 2Ω. Если же излучение связано главным образом с «качанием», то частота появления пятна, фиксированного на поверхности пульсара, равна

$$\omega_z \approx \dot{\phi} + \dot{\psi}. \tag{16.6.16}$$

По-видимому, ω_z и будет частотой электромагнитного излучения, но она будет отличаться от частоты гравитационных волн $\Omega = \dot{\phi}$ на небольшую неизвестную частоту прецессии $\dot{\psi}$.

В общем случае, когда излучение порождается и «горой», и «качанием», величина dE/dt определяется суммой уравнений (16.6.7) и (16.6.15), если эффекты «горы» и «качания» достаточно малы[1].

Если излучение пульсара вызвано существованием «горы», максимальная эллиптичность, определенная формулой (16.6.10), по порядку величины должна быть равна безразмерной деформации, соответствующей пределу прочности коры. Это очень неопределенная величина. Для идеально чистых кристаллов в лаборатории она порядка 10^{-2} — 10^{-3}, но, если в кристаллах имеются примеси или дефекты, она снижается до $\sim 10^{-5}$. Модель звездотрясений (разд. 10.11) не позволяет достаточно точно определить эту величину для пульсаров, но обычно считается, что в лучшем случае она должна быть порядка $5 \cdot 10^{-4}$. «Горы» на пульсаре имеют высоту не более нескольких метров!

Для излучения пульсаров, связанного с «качанием»

$$I_3 - I_1 \simeq \varepsilon I_3,$$

где ε теперь означает параметр сплюснутости, как в уравнении (10.11.2). Его значения в диапазоне 10^{-3} — 10^{-4} кажутся правдоподобными (см.

[1] Детальное рассмотрение общего случая, включая возмущения метрики h, см. в [639].

разд. 10.11). Эффект «качания» учитывался при объяснении «микротрясений» пульсаров в Крабовидной туманности и в созвездии Парусов. Верхняя оценка θ порядка 10^{-1}; вероятно [460], $\theta \lesssim 10^{-2} - 10^{-3}$.

Упражнение 16.12. Оцените dE/dt по отдельности для излучения, порождаемого «горой» и «качанием», на примере пульсаров в Крабовидной туманности и в созвездии Парусов. Оцените также амплитуду волны h на Земле, предполагая, что расстояние до пульсара в Крабовидной туманности 2000 пс и до пульсара в созвездии Парусов 500 пс. Каково максимальное значение h, согласующееся с замедлением пульсаров?

Упражнение 16.13. а) Покажите, что

$$\frac{dE}{dt} = \Omega \frac{dJ}{dt}$$

для излучения, вызванного «качанием». (В данном случае $J = J_z$; нет необходимости предполагать угол θ малым.)

б) Покажите, что гравитационное излучение приводит к экспоненциальному уменьшению угла θ со временем, а составляющая момента количества движения вдоль оси симметрии $J \cos\theta$ остается постоянной.

16.7. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Другим потенциальным источником гравитационного излучения могут быть столкновения или тесные сближения астрофизических объектов.

Рассмотрим идеализированную ситуацию, когда две точечные массы m_1 и m_2 падают навстречу друг другу из состояния покоя на бесконечности. Предположим, что они испытывают лобовое столкновение, так что движение направлено вдоль оси x. Выберем положение покоящегося центра масс в точке $x = 0$. Тогда

$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 = \mu x, \tag{16.7.1}$$

где

$$x \equiv x_1 - x_2, \qquad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}, \qquad M \equiv m_1 + m_2. \tag{16.7.2}$$

Поскольку

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \mu x^2, \tag{16.7.3}$$

получаем

$$\text{Ɨ}_{xx} = \tfrac{2}{3}\mu x^2, \qquad \text{Ɨ}_{yy} = \text{Ɨ}_{zz} = -\tfrac{1}{3}\mu x^2. \tag{16.7.4}$$

Используя уравнение движения

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}, \tag{16.7.5}$$