разд. 10.11). Эффект «качания» учитывался при объяснении «микротрясений» пульсаров в Крабовидной туманности и в созвездии Парусов. Верхняя оценка θ порядка 10^{-1}; вероятно [460], $\theta \lesssim 10^{-2} - 10^{-3}$.

Упражнение 16.12. Оцените dE/dt по отдельности для излучения, порождаемого «горой» и «качанием», на примере пульсаров в Крабовидной туманности и в созвездии Парусов. Оцените также амплитуду волны h на Земле, предполагая, что расстояние до пульсара в Крабовидной туманности 2000 пс и до пульсара в созвездии Парусов 500 пс. Каково максимальное значение h, согласующееся с замедлением пульсаров?

Упражнение 16.13. а) Покажите, что

$$\frac{dE}{dt} = \Omega \frac{dJ}{dt}$$

для излучения, вызванного «качанием». (В данном случае $J = J_z$; нет необходимости предполагать угол θ малым.)

б) Покажите, что гравитационное излучение приводит к экспоненциальному уменьшению угла θ со временем, а составляющая момента количества движения вдоль оси симметрии $J \cos\theta$ остается постоянной.

16.7. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Другим потенциальным источником гравитационного излучения могут быть столкновения или тесные сближения астрофизических объектов.

Рассмотрим идеализированную ситуацию, когда две точечные массы m_1 и m_2 падают навстречу друг другу из состояния покоя на бесконечности. Предположим, что они испытывают лобовое столкновение, так что движение направлено вдоль оси x. Выберем положение покоящегося центра масс в точке $x = 0$. Тогда

$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 = \mu x, \tag{16.7.1}$$

где

$$x \equiv x_1 - x_2, \qquad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}, \qquad M \equiv m_1 + m_2. \tag{16.7.2}$$

Поскольку

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \mu x^2, \tag{16.7.3}$$

получаем

$$I_{xx} = \tfrac{2}{3}\mu x^2, \qquad I_{yy} = I_{zz} = -\tfrac{1}{3}\mu x^2. \tag{16.7.4}$$

Используя уравнение движения

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}, \tag{16.7.5}$$

или, что эквивалентно

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{GM}{x}, \tag{16.7.6}$$

находим

$$\dddot{I}_{xx} = -\frac{4}{3} G\mu M \frac{\dot{x}}{x^2}. \tag{16.7.7}$$

Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{I}^2_{xx} + \dddot{I}^2_{yy} + \dddot{I}^2_{zz}\rangle$$

$$= \frac{8}{15}\frac{G^3\mu^2M^2}{c^5}\left\langle \frac{\dot{x}^2}{x^4}\right\rangle. \tag{16.7.8}$$

Полная энергия, излученная при столкновении, равна

$$\Delta E = \int \frac{dE}{dt}dt = \int \frac{dE}{dt}\frac{1}{\dot{x}}dx$$

$$= \frac{8}{15}\frac{G^3\mu^2M^2}{c^5}(2GM)^{1/2}\int_{x_{\min}}^{\infty}\frac{dx}{x^{9/2}}. \tag{16.7.9}$$

Интеграл в уравнении (16.7.9) расходится при $x_{\min} \to 0$. Однако и наше ньютоновское рассмотрение становится неприменимым по мере того, как $x_{\min} \to 0$. Поэтому мы «обрежем» интеграл на «горизонте» $x_{\min} = 2GM/c^2$; результаты соответствующего релятивистского рассмотрения приводятся ниже. При $x_{\min} = 2GM/c^2$ уравнение (16.7.9) дает

$$\Delta E = \frac{2}{105}\frac{\mu^2c^2}{M}. \tag{16.7.10}$$

Можно сравнить этот результат с точными релятивистскими вычислениями [156] излучения пробной частицы, падающей по радиусу из состояния покоя на бесконечности в шварцшильдовскую черную дыру. В этом случае приведенная масса совпадает с массой пробной частицы, а полная масса — это масса черной дыры. В работе [156] получено

$$\Delta E = 0{,}0104\frac{\mu^2c^2}{M}, \tag{16.7.11}$$

что вполне согласуется с уравнением (16.7.10), если учитывать произвольность сделанного обрезания интеграла.

В работе [544] приводятся результаты численного решения на ЭВМ полных уравнений Эйнштейна и рассчитано излучение, возникающее при лобовом столкновении двух шварцшильдовских черных дыр одинаковой массы. При этом найдено

$$\Delta E = 0{,}001Mc^2, \tag{16.7.12}$$

где неопределенность численного решения, вероятно, оценивается множителем, не превышающим 2.

Положив в выражении (16.7.10) $m_1 = m_2$, получим

$$\Delta E = \tfrac{1}{840} Mc^2 = 0{,}0012 Mc^2, \tag{16.7.13}$$

что близко к результату, полученному численным методом. Можно предполагать, что бóльшая энергия излучается, если соударение оказывается не точно лобовым [161].

Упражнение 16.14. Вычислите форму волны $h_{jk}^{TT}(t)$, наблюдаемую удаленным наблюдателем по направлению, составляющему угол θ с осью x, для лобового столкновения, проанализированного в этом разделе.

Рассматривая идеализированные столкновения, можно вывести важный результат, касающийся низкочастотного спектра энергии гравитационных волн, связанных с коллапсом. Определим преобразование Фурье $\tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega)$ величины $\dddot{I}_{jk}$ следующим образом:

$$\tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dddot{I}_{jk}(t) e^{i\omega t}\, dt. \tag{16.7.14}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\dddot{I}_{jk}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega. \tag{16.7.15}$$

Поскольку $I_{jk}(t)$ — действительная величина,

$$\tilde{I}_{jk}^{(3)*}(\omega) = \tilde{I}_{jk}^{(3)}(-\omega), \tag{16.7.16}$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину.

Выведем теперь теорему Парсеваля для спектра энергии $dE/d\omega$. Поскольку $I_{jk}^{(3)}(t)$ — действительная величина, можно записать

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \dddot{I}_{jk}(t) \dddot{I}_{jk}^{*}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{10\pi} \frac{G}{c^5} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega) \tilde{I}_{jk}^{(3)*}(\omega') e^{-i(\omega-\omega')t}. \tag{16.7.17}$$

Интегрирование по t дает δ-функцию, так что

$$\Delta E = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left|\tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega)\right|^2 = \frac{2}{5} \frac{G}{c^5} \int_{0}^{\infty} d\omega \left|\tilde{I}_{jk}^{(3)}(\omega)\right|^2, \tag{16.7.18}$$

где использовано соотношение (16.7.16). Таким образом,

$$\Delta E = \int_{0}^{\infty} \frac{dE}{d\omega} d\omega, \tag{16.7.19}$$

где

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{2}{5}\frac{G}{c^5}\left|\tilde{I}^{(3)}_{jk}(\omega)\right|^2. \qquad (16.7.20)$$

Рассмотрим теперь низкочастотный предел уравнения (16.7.20). Когда $\omega \to 0$, выражение (16.7.14) дает

$$\tilde{I}^{(3)}_{jk}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\ddot{I}_{jk}(t)\Big|_{t_i}^{t_f}, \qquad (16.7.21)$$

где $\ddot{I}_{jk}(t)$ не равно нулю только в интервале $t_i \leqslant t \leqslant t_f$. Для столкновения при свободном падении, описанного выше, $t_i = -\infty$, $t_f = t_{\min}$. Из уравнений (16.7.20) и (16.7.21) следует, что $dE/d\omega$ не обращается в нуль при $\omega = 0$, если $\ddot{I}_{jk}(t)$ не равно нулю при t_i или t_f [предполагается, что $\ddot{I}_{jk}(t_i) \neq \ddot{I}_{jk}(t_f)$]. Итак, движение из состояния покоя при конечном значении радиуса, или гиперболическое соударение (конечная скорость на бесконечности), приводят к ненулевому значению $dE/d\omega$ при $\omega \to 0$. Однако, как будет показано ниже, параболическое соударение (свободное падение с нулевой скоростью на бесконечности) дает $dE/d\omega \sim \omega^{4/3} \to 0$, когда $\omega \to 0$.

Если подставить выражения (16.7.4) прямо в (16.7.14), переходя в дальнейшем в пределу $\omega \to 0$, мы получим расходящийся интеграл. Поэтому сначала перепишем уравнение (16.7.14), выполнив интегрирование по частям:

$$\tilde{I}^{(3)}_{jk}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left[\ddot{I}_{jk}(t)e^{i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{I}_{jk}(t)e^{i\omega t}\,dt\right]. \qquad (16.7.22)$$

Теперь уравнения (16.7.4) — (16.7.6) дают

$$\ddot{I}_{xx}(t) = \frac{4}{3}\frac{GM\mu}{x}, \qquad (16.7.23)$$

где

$$x = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2/3}(2GM)^{1/3}(-t)^{2/3}, \qquad x \to \infty \text{ при } t \to -\infty. \qquad (16.7.24)$$

«Обрежем» уравнение (16.7.24) на $x_{\min} = 2GM/c^2$ при $t = t_{\min}$. Для $t > t_{\min}$ положим все производные $\ddot{I}_{jk}(t)$ равными нулю. Таким образом, первый член в правой части уравнения (16.7.22) равен нулю и мы имеем

$$\tilde{I}^{(3)}_{xx}(\omega) = \frac{-i\omega}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{t_{\min}}\frac{2^{7/3}(GM)^{2/3}\mu}{3^{5/3}(-t)^{2/3}}e^{i\omega t}\,dt. \qquad (16.7.25)$$

Положив $y = -\omega t$, получим

$$\tilde{I}^{(3)}_{xx}(\omega) = \frac{-i\omega^{2/3}2^{7/3}(GM)^{2/3}\mu}{(2\pi)^{1/2}3^{5/3}}\int_{|\omega t_{\min}|}^{\infty}e^{-iy}\frac{dy}{y^{2/3}}. \qquad (16.7.26)$$

Когда $\omega \to 0$, можно положить нижний предел интегрирования равным нулю. Тогда интеграл равен $\Gamma(1/3)\exp(-i\pi/6)$. Подставляя это значение в уравнение (16.7.20) и используя выражения (16.7.4) для $\ddot{I}_{yy}$ и $\ddot{I}_{zz}$, находим

$$\frac{dE}{d\omega} \to \frac{2^{11/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{5\pi(3)^{7/3}} \frac{G}{c^5}(GM\omega)^{4/3}\mu^2, \qquad \omega \to 0. \tag{16.7.27}$$

Степенной закон $\omega^{4/3}$ в пределе $\omega \to 0$ следует из поведения $\ddot{I}_{jk}(t)$ при $t \to -\infty$. В этом режиме источник оказывается ньютоновским и использованная выше квадрупольная формула должна быть отличным приближением. Итак, даже если в результате коллапса или столкновений образуется черная дыра, низкочастотный спектр гравитационных волн формируется на самой ранней стадии и может быть вычислен с использованием квадрупольной формулы. В частности, свободное падение из состояния покоя на бесконечности в общем случае приводит к степенному закону $\omega^{4/3}$ при $\omega \to 0$ [593].

Гравитационное излучение, вызванное лобовым столкновением двух нейтронных звезд с одинаковой массой, должно быть, вероятно, гораздо сильнее, чем предсказывает уравнение (16.7.12), если нейтронные звезды достаточно массивны и компактны. В этой ситуации распространение от точки контакта наружу двух ударных волн отдачи приводит к замедлению движения сталкивающихся масс, что служит причиной резкого изменения квадрупольного момента. Предварительные расчеты [132, 528, 618] свидетельствуют о типичной эффективности излучения порядка $\Delta E/Mc^2 \sim 0{,}01$, что соответствует амплитудам волн $h \sim 10^{-21}$ при расстояниях 10 Мпс (скопление галактик в Деве). Таким событием, хотя они случаются не так уж часто, вполне может отмечаться конечный этап эволюции двойных пульсаров. Оценки [131, 133] показывают, что в пределах 40 Мпс от Земли может происходить примерно одно такое событие в год. Чтобы обнаружить подобное столкновение, требуется чувствительность детекторов порядка $h \sim 10^{-22}$.

16.8. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ КОЛЛАПСЕ С ОТКЛОНЕНИЯМИ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Одним из наиболее вероятных источников гравитационного излучения кажется гравитационный коллапс массивной звезды, приводящий к образованию нейтронной звезды или черной дыры. Размерные оценки разд. 16.3 говорят о том, что звезда может излучить значительную долю энергии Mc^2, если коллапс достаточно отличается от сферически симметричного. Детальные расчеты такого коллапса начали появляться только теперь. Для них необходимо применение двух- или трехмерных гидродинамических представлений с полным учетом эффектов общей теории относительности. При этом требуется аккуратное рассмотрение уравнения состояния коллап-