

Когда  $\omega \rightarrow 0$ , можно положить нижний предел интегрирования равным нулю. Тогда интеграл равен  $\Gamma(1/3)\exp(-i\pi/6)$ . Подставляя это значение в уравнение (16.7.20) и используя выражения (16.7.4) для  $f_{yy}$  и  $f_{zz}$ , находим

$$\frac{dE}{d\omega} \rightarrow \frac{2^{11/3}\Gamma(\frac{1}{3})^2}{5\pi(3)^{7/3}} \frac{G}{c^5} (GM\omega)^{4/3} \mu^2, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (16.7.27)$$

Степенной закон  $\omega^{4/3}$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$  следует из поведения  $f_{jk}(t)$  при  $t \rightarrow -\infty$ . В этом режиме источник оказывается ньютоновским и использованная выше квадрупольная формула должна быть отличным приближением. Итак, даже если в результате коллапса или столкновений образуется черная дыра, низкочастотный спектр гравитационных волн формируется на самой ранней стадии и может быть вычислен с использованием квадрупольной формулы. В частности, свободное падение из состояния покоя на бесконечности в общем случае приводит к степенному закону  $\omega^{4/3}$  при  $\omega \rightarrow 0$  [593].

Гравитационное излучение, вызванное лобовым столкновением двух нейтронных звезд с одинаковой массой, должно быть, вероятно, гораздо сильнее, чем предсказывает уравнение (16.7.12), если нейтронные звезды достаточно массивны и компактны. В этой ситуации распространение от точки контакта наружу двух ударных волн отдачи приводит к замедлению движения сталкивающихся масс, что служит причиной резкого изменения квадрупольного момента. Предварительные расчеты [132, 528, 618] свидетельствуют о типичной эффективности излучения порядка  $\Delta E/Mc^2 \sim 0,01$ , что соответствует амплитудам волн  $h \sim 10^{-21}$  при расстояниях 10 Мпс (скопление галактик в Деве). Таким событием, хотя они случаются не так уж часто, вполне может отмечаться конечный этап эволюции двойных пульсаров. Оценки [131, 133] показывают, что в пределах 40 Мпс от Земли может происходить примерно одно такое событие в год. Чтобы обнаружить подобное столкновение, требуется чувствительность детекторов порядка  $h \sim 10^{-22}$ .

## 16.8. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ КОЛЛАПСЕ С ОТКЛОНЕНИЯМИ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Одним из наиболее вероятных источников гравитационного излучения кажется гравитационный коллапс массивной звезды, приводящий к образованию нейтронной звезды или черной дыры. Размерные оценки разд. 16.3 говорят о том, что звезда может излучить значительную долю энергии  $Mc^2$ , если коллапс достаточно отличается от сферически симметричного. Детальные расчеты такого коллапса начали появляться только теперь. Для них необходимо применение двух- или трехмерных гидродинамических представлений с полным учетом эффектов общей теории относительности. При этом требуется аккуратное рассмотрение уравнения состояния коллап-

сирующего вещества, а также геометрии пространства-времени, чтобы подсчитать поток гравитационных волн (обсуждение этих работ приведено в [544]).

Некоторое представление об этих сложных расчетах можно получить из более простых вычислений сфероидальной или эллипсоидальной модели [494]. В этом случае рассматривается ньютоновский коллапс однородного сфероида или эллипсоида. Чтобы форма объекта оставалась эллипсоидальной, закон изменения давления должен быть квадратичным по координатам:

$$P = P_c(t) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad (16.8.1)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — полуоси, а  $P_c$  — давление в центре. Уравнение состояния можно промоделировать, если принять

$$P_c = P_c(\rho), \quad (16.8.2)$$

где однородная плотность  $\rho$  дается выражением

$$\rho = \frac{M}{4\pi abc/3}. \quad (16.8.3)$$

Трехмерные гидродинамические уравнения движения для такой конфигурации сводятся к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям для величин  $a$ ,  $b$  и  $c$ , являющихся функциями времени.

Для получения больших потоков гравитационных волн необходимы значительные отклонения от сферической симметрии. Начав с почти сферической конфигурации при больших радиусах, можно ввести эллиптичность, если объект обладает моментом количества движения. Для сфероида с малым моментом количества движения  $J$  имеем  $J \propto e$ , где эксцентриситет  $e$  определяется выражением

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad (16.8.4)$$

(сравните с разд. 7.3).

---

*Упражнение 16.15.* Используйте результат, полученный в разд. 7.3, чтобы показать

$$J = \left( \frac{2M}{5} \right)^{3/2} (Ga)^{1/2} e \quad (16.8.5)$$

для сфероида Маклорена в пределе  $e \rightarrow 0$ .

---

Уравнение (16.8.5) показывает, что в ходе осесимметричного коллапса с сохраняющимися значениями  $J$  и  $M$  эксцентриситет  $e$  должен расти. Это вытекает из детальных расчетов. Момент количества движения обеспечива-

ет центробежную поддержку экваториальной оси  $a$ , в то время как коллапс полярной оси  $c$  не связан с вращением.

Упражнение 16.16. Покажите, что для сфероидального коллапса

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{375} \frac{GM^2}{c^5} \langle (\ddot{a}^2 - \ddot{c}^2)^2 \rangle. \quad (16.8.6)$$

Для доказательства может оказаться полезным уравнение (16.6.8).

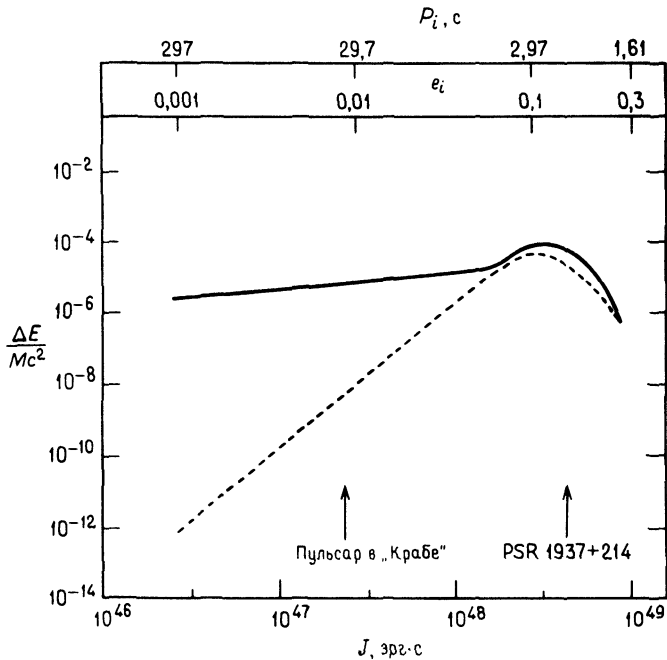


Рис. 16.2. Эффективность гравитационного излучения как функция момента количества движения для сферически несимметричного коллапса звездного ядра. Показаны результаты численных расчетов, в которых для моделирования коллапса вырожденного гомологичного ядра массой  $M = 0,8 M_{\odot}$  принимаются однородные сфероиды. Начальная плотность равна  $\rho_i = 4 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$ , эксцентриситет  $e_i$ , период вращения  $P_i$ . Коллапс начинается из состояния покоя и описывается реалистичным «горячим» ядерным уравнением состояния [уравнение (16.8.2)], причем предусматривается возникновение «отдачи» (см. гл. 18). Эффективность излучения, вызванного первоначальным падением вещества и последующим «отскоком» (при  $\rho_{\text{отскок}} \sim 10^{15} \text{ г/см}^3$ ), показана штриховой линией [см. уравнение (16.8.8)]. Полная эффективность после того, как затухнут все колебания звездного ядра, показана сплошной кривой. Стрелками отмечены оценки моментов количества движения пульсара в Крабовидной туманности и пульсара PSR 1937 + 214, которые обладают самыми короткими периодами среди известных пульсаров (33 мс и 1,6 мс соответственно) [494].

Из уравнений (16.8.4)—(16.8.6) следует, что для малых значений  $J$

$$\frac{dE}{dt} \propto J^4 \quad (\text{малый } J). \quad (16.8.7)$$

При больших значениях  $J$  конфигурация не коллапсирует к малым радиусам и высоким плотностям из-за больших центробежных сил, действующих в экваториальной плоскости. Таким образом,  $dE/dt$  стремится к нулю как при больших, так и при малых моментах количества движения  $J$ . Максимум достигается при некотором промежуточном значении  $J_c$ , которое обычно на порядок выше момента количества движения Солнца для объекта с массой порядка  $M_\odot$ , коллапсирующего в нейтронную звезду. При  $J \sim J_c$  энергия вращения коллапсирующей звезды становится сравнимой с гравитационной потенциальной энергией и, следовательно, эксцентриситет становится большим при плотностях несколько выше ядерной. Максимальная эффективность излучения  $\Delta E/Mc^2$  составляет, самое большее, 1% в предельных случаях, а типичные эффективности могут быть на несколько порядков величины ниже.

Эффективное излучение возможно также, если магнитные поля достаточно сильны, чтобы вызвать отклонения от сферы. Другая возможность обеспечивается появлением (по любой причине) небольшого начального эксцентриситета, который возрастает в процессе коллапса. Если коллапс протекает в виде нескольких последовательных стадий, то во время каждой из них эксцентриситет может увеличиваться, что приводит к высокой эффективности излучения. Подобный сценарий отражен на рис. 16.2 и основан на расчетах коллапса сфероида [494]. Вопрос о том, какая из этих возможностей реализуется в природе, остается открытым, пока не будут выполнены крупномасштабные расчеты на ЭВМ или созданы детекторы гравитационных волн с достаточной чувствительностью.

*Упражнение 16.7.* а) Используйте анализ размерностей и соотношение (16.8.7), чтобы показать, что при коллапсе медленно вращающегося звездного ядра с образованием черной дыры выделяется энергия в виде гравитационных волн, равная

$$\Delta E \sim \left( \frac{J}{GM^2/c} \right)^4 Mc^2. \quad (16.8.8)$$

б) Оцените численно эффективность излучения  $\Delta E/Mc^2$  для коллапса звездного ядра с таким же моментом количества движения, какой имеет пульсар в Крабовидной туманности.