17.3. ВЛИЯНИЕ ПЛАЗМЫ

Газовое давление водородной плазмы

$$P_g = 2nkT, \tag{17.3.1}$$

вдвое превышает давление протонов или электронов по отдельности. Плотность энергии равна

$$\varepsilon_g = m_{\rm H}nc^2 + 3nkT, \tag{17.3.2}$$

где мы принимаем, что газ нерелятивистский ($kT \ll m_e c^2$). Таким образом, первый закон термодинамики дает следующее выражение для энтропии:

$$s_g = 2k \ln\left(\frac{T^{3/2}}{n}\right) + \text{const}. \tag{17.3.3}$$

Оказывается, что постоянный член не связан с нашим последующим рассмотрением, но его численное значение представляет интерес. Для нашего случая найдено, что он равен [см. уравнение (2.3.34)]

$$\frac{s_g}{k} = \ln\left(\frac{T^3}{\rho^2}\right) + \frac{s_0}{k}, \tag{17.3.4}$$

$$\frac{s_0}{k} \equiv 3\ln\left(\frac{2\pi k}{h^2}\right) + \frac{3}{2}\ln m_e + \frac{7}{2}\ln m_p + 5 + 2\ln 2 = -21{,}0,$$

где температура T выражена в кельвинах, а плотность ρ — в г/см$^{-3}$.

Заметим, что уравнения (17.2.1), (17.2.2) и (17.3.1) дают

$$\beta \equiv \frac{P_g}{P_r} = \frac{8}{s_r/k}. \tag{17.3.5}$$

Поэтому, когда $M \gg M_\odot$, так что $s_r/k \gg 1$ [уравнение (17.2.8)], и $\beta \ll 1$, давление газа становится всего лишь малым возмущением.

Упражнение 17.2. Сравните s_r и s_g для $M = 10^6\,M_\odot$, $\rho = 10^3$ г/см^3 и для $M = 10^8\,M_\odot$, $\rho = 1$ г/см^3. Температура дается выражением (17.2.9).

Ответ: $s_g \ll s_r$.

Упражнение 17.3. а) Покажите, что, когда учитываются как давление излучения, так и давление газа, сверхмассивная звезда описывается ньютоновской политропой с $P = K\rho^\Gamma$, где K дается уравнением (17.2.6), а Γ определяется выражением

$$\Gamma \equiv 1 + \frac{P}{\varepsilon'} \simeq \frac{4}{3} + \frac{\beta}{6} + \mathcal{O}(\beta^2),$$

где ε' — плотность полной внутренней энергии, за исключением энергии, соответствующей массе покоя.

б) Используя результат, полученный в части а), докажите, что при *строго* ньютоновской гравитации равновесия сверхмассивная звезда, безусловно, устойчива к радиальным адиабатическим возмущениям при *произвольных* значениях плотности в центре.

Указание: См. разд. 6.7.

в) Зафиксируйте энтропию, положив $\beta = 8{,}494 \cdot 10^{-3}$, и вычислите соответствующие значения K и Γ.

Ответ: $K = 3{,}839 \cdot 10^{18}$ (в единицах СГС), $\Gamma = 1{,}3347$.

г) Постройте на рис. 17.1 равновесную кривую $M(\rho)$ для ньютоновских политроп, соответствующих этому значению энтропии [можно аппроксимировать требуемые величины Лейна—Эмдена ξ_1 и $\xi_1^2|\theta'(\xi_1)|$, используя уравнение (3.3.12)]. Сравните вашу кривую с графиком ньютоновской политропы, поддерживаемой одним давлением излучения, и прокомментируйте результат.

Указание: Оцените, каков знак $dM/d\rho_c$ в этих двух случаях.

Мы хотим вычислить поправки к E_{int}, связанные с влиянием водородной плазмы. Полная внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы, равна

$$u = \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_g}{\rho} = \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3kT}{m_{\text{H}}}, \tag{17.3.6}$$

где отброшен постоянный член, представляющий массу покоя. Требуется выразить T через плотность ρ и полную энтропию

$$s = s_r + s_g = \frac{4m_{\text{H}}aT^3}{3\rho} + k\ln\frac{T^3}{\rho^2} + s_0. \tag{17.3.7}$$

Выражение T через s в нулевом приближении получается, если пренебречь s_g, и дается уравнением (17.2.4) с заменой s_r на s. Подставим это выражение в малый член s_g, так что

$$\frac{4m_{\text{H}}aT^3}{3\rho} \simeq s\left(1 - \frac{s_0}{s} - \frac{k}{s}\ln\frac{3s}{4m_{\text{H}}a\rho}\right). \tag{17.3.8}$$

Таким образом,

$$T \simeq \left(\frac{3s\rho}{4m_{\text{H}}a}\right)^{1/3}\left(1 - \frac{s_0}{3s} - \frac{k}{3s}\ln\frac{3s}{4m_{\text{H}}a\rho}\right). \tag{17.3.9}$$

Для простоты будем рассматривать s_0/s как малую величину, что верно при $M/M_\odot \gg 10^3$ [см. соотношения (17.2.8) и (17.3.4)], но не существенно для доказательства. Теперь подставим выражение (17.3.9) в (17.3.6). В малом члене $3kT/m_{\text{H}}$ достаточно оставить только нулевое приближение для T. Находим

$$u = 3K\rho^{1/3} + \lambda\rho^{1/3} + \mu\rho^{1/3}\ln\rho, \tag{17.3.10}$$

где

$$\lambda = -\frac{4as_0}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\mathrm{H}}a}\right)^{4/3} + \frac{3k}{m}\left(\frac{3s}{4m_{\mathrm{H}}a}\right)^{1/3} - \frac{4ka}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\mathrm{H}}a}\right)^{4/3}\ln\left(\frac{3s}{4m_{\mathrm{H}}a}\right), \qquad (17.3.11)$$

$$\mu = \frac{4ka}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\mathrm{H}}a}\right)^{4/3}. \qquad (17.3.12)$$

Теперь выражение для полной внутренней энергии принимает вид

$$E_{\mathrm{int}} + \Delta E_{\mathrm{int}} = \int u\, dm, \qquad (17.3.13)$$

где интегрирование выполняется по распределению массы для политропы с $n = 3$. Первый член в уравнении (17.3.10) дает E_{int} [см. уравнение (17.2.7)]. Подставляя $\rho = \rho_c\theta^3$ [уравнение (3.3.3)], получаем

$$E_{\mathrm{int}} + \Delta E_{\mathrm{int}} = k_1\left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau\right)M\rho_c^{1/3} + \tfrac{1}{3}k_1\mu M\rho_c^{1/3}\ln \rho_c, \qquad (17.3.14)$$

где

$$\tau = \frac{\mu}{Mk_1}\int \theta \ln \theta^3\, dm. \qquad (17.3.15)$$

17.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХМАССИВНЫХ ЗВЕЗД

Как и в случае белых карликов (гл. 6), для изучения устойчивости сверхмассивных звезд следует учесть эффекты общей теории относительности — уравнения (6.10.21). Поэтому запишем

$$E = E_{\mathrm{int}} + E_{\mathrm{grav}} + \Delta E_{\mathrm{int}} + \Delta E_{\mathrm{GTR}}$$
$$= AM\rho_c^{1/3} - BM^{5/3}\rho_c^{1/3} + CM\rho_c^{1/3}\ln \rho_c - DM^{7/3}\rho_c^{2/3}, \qquad (17.4.1)$$

где

$$A = k_1\left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau\right), \qquad B = k_2 G,$$

$$C = \frac{k_1\mu}{3}, \qquad D = \frac{k_4 G^2}{c^2}, \qquad k_4 = 0{,}918294. \qquad (17.4.2)$$

Для равновесия требуется выполнение условия $\partial E/\partial\rho_c = 0$ при постоянных M и s. Это приводит к уравнению

$$0 = \tfrac{1}{3}\left(AM - BM^{5/3} + CM\ln \rho_c\right)\rho_c^{-2/3} + CM\rho_c^{-2/3} - \tfrac{2}{3}DM^{7/3}\rho_c^{-1/3}. \qquad (17.4.3)$$