где

$$\lambda = -\frac{4as_0}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\rm H}a}\right)^{4/3} + \frac{3k}{m}\left(\frac{3s}{4m_{\rm H}a}\right)^{1/3}$$

$$-\frac{4ka}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\rm H}a}\right)^{4/3}\ln\left(\frac{3s}{4m_{\rm H}a}\right), \qquad (17.3.11)$$

$$\mu = \frac{4ka}{3s}\left(\frac{3s}{4m_{\rm H}a}\right)^{4/3}. \qquad (17.3.12)$$

Теперь выражение для полной внутренней энергии принимает вид

$$E_{\rm int} + \Delta E_{\rm int} = \int u\,dm, \qquad (17.3.13)$$

где интегрирование выполняется по распределению массы для политропы с $n = 3$. Первый член в уравнении (17.3.10) дает $E_{\rm int}$ [см. уравнение (17.2.7)]. Подставляя $\rho = \rho_c\theta^3$ [уравнение (3.3.3)], получаем

$$E_{\rm int} + \Delta E_{\rm int} = k_1\left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau\right)M\rho_c^{1/3} + \tfrac{1}{3}k_1\mu M\rho_c^{1/3}\ln\rho_c, \qquad (17.3.14)$$

где

$$\tau = \frac{\mu}{Mk_1}\int\theta\ln\theta^3\,dm. \qquad (17.3.15)$$

17.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХМАССИВНЫХ ЗВЕЗД

Как и в случае белых карликов (гл. 6), для изучения устойчивости сверхмассивных звезд следует учесть эффекты общей теории относительности — уравнения (6.10.21). Поэтому запишем

$$E = E_{\rm int} + E_{\rm grav} + \Delta E_{\rm int} + \Delta E_{\rm GTR}$$

$$= AM\rho_c^{1/3} - BM^{5/3}\rho_c^{1/3} + CM\rho_c^{1/3}\ln\rho_c - DM^{7/3}\rho_c^{2/3}, \qquad (17.4.1)$$

где

$$A = k_1\left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau\right), \qquad B = k_2G,$$

$$C = \frac{k_1\mu}{3}, \qquad D = \frac{k_4G^2}{c^2}, \qquad k_4 = 0{,}918294. \qquad (17.4.2)$$

Для равновесия требуется выполнение условия $\partial E/\partial\rho_c = 0$ при постоянных M и s. Это приводит к уравнению

$$0 = \tfrac{1}{3}\left(AM - BM^{5/3} + CM\ln\rho_c\right)\rho_c^{-2/3} + CM\rho_c^{-2/3} - \tfrac{2}{3}DM^{7/3}\rho_c^{-1/3}. \qquad (17.4.3)$$

Члены, пропорциональные C и D, дают небольшие поправки, зависящие от ρ_c, к соотношению (17.2.8) между s и M в равновесном состоянии. В результате равновесная масса M теперь изменяется в зависимости от ρ_c при фиксированном значении s, как показано на рис. 17.1.

Неустойчивость возникает, когда $\partial^2 E/\partial\rho_c^2 = 0$; в этой точке $dM/d\rho_c = 0$, как видно на рис. 17.1. Дифференцирование уравнения (17.4.3) дает

$$0 = -\tfrac{2}{9}\left(AM - BM^{5/3} + CM\ln\rho_c\right)\rho_c^{-5/3} - \tfrac{1}{3}CM\rho_c^{-5/3} + \tfrac{2}{9}DM^{7/3}\rho_c^{-4/3}. \tag{17.4.4}$$

Умножив уравнение (17.4.4) на (3/2) ρ_c и сложив с уравнением (17.4.3), получаем

$$0 = \tfrac{1}{2}CM\rho_c^{-2/3} - \tfrac{1}{3}DM^{7/3}\rho_c^{-1/3}, \tag{17.4.5}$$

или, записав $\rho_c = \rho_{\text{crit}}$ для точки появления неустойчивости, приходим к результату

$$\rho_{\text{crit}} = \left(\frac{3C}{2D}\right)^3 \frac{1}{M^4}. \tag{17.4.6}$$

Подставляя значения C и D из выражений (17.4.2), μ из (17.3.12) и s из (17.2.8), получаем

$$\rho_{\text{crit}} = \left(\frac{k_1 k c^2}{2k_4 G^2 m_{\text{H}}}\right)^3 \left(\frac{3k_2 G}{k_1 a}\right)^{3/4} \frac{1}{M^{7/2}}$$

$$= 1{,}996 \times 10^{18}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{7/2} \text{ г/см}^3. \tag{17.4.7}$$

Используя уравнение (17.4.3) в (17.4.1), получим выражение для энергии в равновесном состоянии

$$E_{\text{eq}} = -3CM\rho_c^{1/3} + DM^{7/3}\rho_c^{2/3}. \tag{17.4.8}$$

Равновесная энергия при появлении неустойчивости, согласно уравнениям (17.4.5) и (17.4.7), равна

$$E_{\text{crit}} = -DM^{7/3}\rho_{\text{crit}}^{2/3} = -3{,}583 \times 10^{54} \text{ эрг}, \tag{17.4.9}$$

и не зависит от M.

Упражнение 17.4. а) Найдите температуру в центре при появлении неустойчивости. б) Найдите фактор красного смещения GM/Rc^2 при появлении неустойчивости.

Ответы:

$$T_{\text{crit}} = (2{,}49 \times 10^{13}\ \text{K})\frac{M_\odot}{M}, \tag{17.4.10}$$

$$\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)_{\text{crit}} = 0{,}6295\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/2}. \tag{17.4.11}$$

Отметим, что, как следует из уравнения (17.4.11), максимальное гравитационное красное смещение для устойчивой сверхмассивной звезды очень мало — в интервале 10^{-2} — 10^{-4}. Тем не менее, как и для белых карликов, небольшие поправки за счет эффектов общей теории относительности оказываются *решающими* при определении устойчивости системы, близкой к ньютоновской.

17.5. ЭВОЛЮЦИЯ СВЕРХМАССИВНЫХ ЗВЕЗД

Попытаемся теперь проследить эволюцию сверхмассивной звезды, начиная со сжатия большого диффузного водородного облака. Как показывает уравнение (17.2.8), для равновесия сферической сверхмассивной звезды требуется, чтобы значение энтропии на барион лежало в интервале 10^2 — 10^4. Это гораздо больше энтропии водородного газа в типичных примерах астрофизической плазмы [см. уравнение (17.3.4)]. Поэтому начальный динамический коллапс должен быть диссипативным (столкновение фрагментов облака, турбулентность, ударные волны), чтобы возникла равновесная конфигурация, которую мы обсуждали. Вагонер [592] рассматривал альтернативную возможность, что еще до того, как энтропия возрастает, становятся важными центробежные силы, обусловленные начальным моментом количества движения, которые приводят к образованию сверхмассивного диска.

Мы предполагаем, что температура в центре никогда не становится настолько высокой, чтобы ядерное сгорание приобрело важное значение. Простое сравнение скорости генерации ядерной энергии с фотонной светимостью — уравнение (17.1.5) — показывает [636], что это допущение обосновано при $M \gtrsim 6 \cdot 10^4 M_\odot$. В этом режиме можно также пренебречь эффектом образования электрон-позитронных пар.

Как только сверхмассивная звезда возникла, ее эволюция сводится к квазистатическому продвижению через последовательность равновесных состояний с возрастающей центральной плотностью. Звезда излучает на эддингтоновском пределе, масса ее по существу остается постоянной, а энтропия и энергия уменьшаются. Когда энергия уменьшается от нуля до E_{crit}, плотность становится достаточно высокой для появления неустойчивости, определяемой общей теорией относительности. Звезда претерпевает катастрофический коллапс.

Описанную картину можно считать обоснованной, если характерное время тепловой эволюции больше характерного гидродинамического времени. Тогда звезда успевает перестраивать свою структуру, чтобы в процессе эволюции всегда находиться в равновесии. Оценивая характерное время тепловой эволюции, имеем

$$t_{\text{thermal}} \sim \frac{|E_{\text{crit}}|}{L} = 2{,}8 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} \text{ с}, \qquad (17.5.1)$$