Приложение Б

Условие неустойчивости $V_2 < 0$

Приводимое доказательство того, что условие $V_2 < 0$ означает неустойчивость, основано на энергетическом принципе Лаваля, Мерсье и Пелла [348] и справедливо для любого симметричного и не зависящего от времени оператора L_{ij}. Его значение состоит в том, что оно не связано ни с какими предположениями о свойствах нормальных мод колебаний (например, об их полноте).

Предположим, что $V_2(t) < 0$ для некоторого возмущения $\tilde{\xi}^i(\mathbf{x}, t)$ в произвольный момент времени t. Выберем этот момент так, чтобы $t = 0$. Запишем $\tilde{\xi}^i$ для этого момента времени в виде $\eta^i(\mathbf{x}, 0)$. Тогда, согласно (6.6.8),

$$V_2(0) = -\frac{1}{2}\int \eta^i L_{ij} \eta^j \, d^3x$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2 \int \rho\left(\eta^i\right)^2 d^3x \tag{Б.1}$$

при соответствующем выборе $\alpha > 0$.

Построим теперь новое возмущение $\xi^i(\mathbf{x}, t)$, при котором кинетическая энергия $T_2(t)$ неограниченно растет (если нам это удастся, мы покажем в явном виде, что система неустойчива).

Рассмотрим начальные данные

$$\xi^i(x,0) = \eta(\mathbf{x},0), \qquad \partial_t \xi^i(\mathbf{x},0) = \alpha\eta^i(\mathbf{x},0), \tag{Б.2}$$

которые однозначно определяют новое возмущение. Для этой функции ξ^i уравнение (6.6.7) дает

$$T_2(0) = \frac{1}{2}\alpha^2 \int \rho\left(\eta^i\right)^2 d^3x, \tag{Б.3}$$

так что

$$E_2 = T_2 + V_2 = 0. \tag{Б.4}$$

Поскольку величина E_2 сохраняется, $T_2 = -V_2$ для всех t. Поэтому из результатов упражнения 6.14 вытекает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T_2. \tag{Б.5}$$

Из неравенства Шварца следует

$$\left[\int \rho\left(\partial_t \xi^i\right) \xi_i \, d^3x\right]^2 \leqslant \int \rho\left(\partial_t \xi^i\right)^2 d^3x \int \rho\left(\xi^i\right)^2 d^3x \tag{Б.6}$$

или

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \leqslant 4IT_2. \tag{Б.7}$$

Комбинация выражений (Б.5) и (Б.7) дает

$$\frac{d^2I}{dt^2} \geqslant \frac{1}{I}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \tag{Б.8}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I}\frac{dI}{dt}\right) \geqslant 0. \tag{Б.9}$$

Но из (Б.2.) следует

$$\frac{1}{I}\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 2\alpha, \tag{Б.10}$$

и поэтому

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} \geqslant 2\alpha \qquad \text{для } t \geqslant 0. \tag{Б.11}$$

После интегрирования получаем

$$I(t) \geqslant I(0)e^{2\alpha t}; \tag{Б.12}$$

отсюда с учетом уравнения (Б.5) следует

$$T_2(t) \geqslant \alpha^2 I(0) e^{2\alpha t}. \tag{Б.13}$$

Таким образом, кинетическая энергия неограниченно растет и система неустойчива.