Приложение Е

Фазовый множитель в уравнении (11.5.16)

Вычисляя в этом разделе фазовый множитель P уравнения (11.5.14), будем следовать Бакалу и Вольфу [41]. Такие интегралы часто появляются в нейтринной физике и физике конденсированного вещества[1]. Используем приближение, считая, что величина kT пренебрежимо мала по сравнению со всеми входящими в задачу кинетическими энергиями Ферми.

Используя уравнение (11.5.2), перепишем P в виде

$$P = B\int \prod_{j=1}^{6} p_j^2\, dp_j\, SE_{\bar{\nu}}\,\delta(E_f - E_i)A, \tag{E.1}$$

где

$$B = (m_\pi c)^{-15}(2\pi)^{-18}, \tag{E.2}$$

$$A = \hbar^{-3}\int \prod_{j=1}^{6} d\Omega_j\, \delta^3(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i). \tag{E.3}$$

В интеграле A достаточно рассмотреть только ту часть фазового объема, где энергии частиц отличаются от энергий Ферми всего на несколько kT. Соответствующий ферми-импульс нейтрона велик по сравнению с ферми-импульсами протона и электрона (см. упражнение 11.1); импульсом нейтрино kT мы полностью пренебрегаем. Учитывая, что

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad \mathbf{k}_f = \mathbf{k}_{1'} + \mathbf{k}_s, \tag{E.4}$$

где

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_{\bar{\nu}}, \tag{E.5}$$

получим

$$\hbar^3 A = \int d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Omega_{1'}\, d\Omega_p\, d\Omega_e\, d\Omega_{\bar{\nu}}\, \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_s). \tag{E.6}$$

Сначала выполним интегрирование по $d\Omega_{1'}$, записав дельта-функцию в виде

$$\delta(k_{1'} - |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|)\frac{\delta(\Omega_{1'} - \Omega_{1+2-s})}{k_{1'}^2}. \tag{E.7}$$

[1] Например, в теории гелия-3.

Интегрирование по $d\Omega_{1'}$ дает единицу и остается

$$\hbar^3 A = \int d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Omega_p\, d\Omega_e\, d\Omega_{\bar\nu}\, \frac{\delta(k_{1'} - |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|)}{k_{1'}^2}. \tag{E.8}$$

Перепишем оставшуюся дельта-функцию в виде

$$\delta\left[k_{1'} - \left(k_1^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|^2 - 2k_1|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|\cos\theta_1\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{\delta\left[\cos\theta_1 - \left(k_{1'}^2 - k_1^2 - |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|^2\right)/\left(2k_1|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|\right)\right]}{k_1|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|/k_{1'}}. \tag{E.9}$$

Здесь мы выбрали ось z так, чтобы она совпадала с направлением $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s$, а также использовали тождество $\delta[f(x)] = \delta(x - a)/|f'(a)|$, где $f(a) = 0$. Выполнив интегрирование по $d\Omega_1$, получаем

$$\hbar^3 A = \frac{2\pi}{k_{1'}k_1} \int \frac{d\Omega_2\, d\Omega_p\, d\Omega_e\, d\Omega_{\bar\nu}}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s|}. \tag{E.10}$$

Вспомнив, что $k_2 \gg k_s$, находим

$$\hbar^3 A = \frac{2\pi(4\pi)^4}{k_{1'}k_1k_2}, \tag{E.11}$$

или

$$A = (4\pi)^5 (2p_1 p_2 p_{1'})^{-1}. \tag{E.12}$$

Дифференциалы импульсов в уравнении (E.1) можно упростить, используя соотношение:

$$p_j\, dp_j = E_j \frac{dE_j}{c^2} \simeq m_j\, dE_j, \qquad j = n, p,$$

$$dp_e \simeq \frac{dE_e}{c}. \tag{E.13}$$

Тогда все p_j (за исключением $p_{\bar\nu}$) можно положить равными $p_{\mathrm{F}}(j)$ и вынести из-под интеграла. Это дает

$$P = 2^9 \pi^5 c^{-4} B m_n^3 m_p p_{\mathrm{F}}(p) p_{\mathrm{F}}^2(e) \int \prod_{j=1}^{6} dE_j\, E_{\bar\nu}^3 S\, \delta(E_f - E_i). \tag{E.14}$$

Теперь выражение (11.5.5) для статистического множителя S может быть записано в виде

$$S = \prod_{j=1}^{5} \left(1 + e^{x_j}\right)^{-1}, \tag{E.15}$$

где безразмерные энергии x_j определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta(E_1 - \mu_n), \\ x_2 &= \beta(E_2 - \mu_n), \\ x_3 &= -\beta(E_e - \mu_e), \\ x_4 &= -\beta(E_{1'} - \mu_n), \\ x_5 &= -\beta(E_p - \mu_p), \\ \beta &\equiv \frac{1}{kT}. \end{aligned} \tag{E.16}$$

Определив

$$y = \frac{E_{\bar\nu}}{kT}, \tag{E.17}$$

получим для уравнения (E.14)

$$P = 2^9 \pi^5 c^{-4} B m_n^3 m_p p_{\mathrm{F}}(p) p_{\mathrm{F}}^2(e) (kT)^8 I, \tag{E.18}$$

где

$$I \equiv \int_0^\infty dy\, y^3 J, \tag{E.19}$$

$$J \equiv \int \prod_{j=1}^{5} dx_j \left(1 + e^{x_j}\right)^{-1} \delta\left[\sum_{j=1}^{5} x_j - y\right]. \tag{E.20}$$

Интеграл J не охватывает энергии меньше mc^2. Однако мы не сделаем ошибки больше $\exp[-\beta E_F'(p)]$, если расширим область интегрирования для каждой величины x_j от $-\infty$ до ∞.

Чтобы вычислить J, начнем с представления

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dz. \tag{E.21}$$

Тогда

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-izy}[f(z)]^5, \tag{E.22}$$

где

$$f(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{izx}(e^x + 1)^{-1}. \tag{E.23}$$

В уравнении (Е.23) величина z должна иметь небольшую отрицательную мнимую часть, чтобы интеграл сходился.

Оценим $f(z)$ посредством интегрирования

$$K \equiv \oint dw\, e^{izw}(e^w + 1)^{-1} \tag{E.24}$$

по контуру, показанному на рис. Е.1. Вклад вертикальных отрезков в предельном случае $R \to \infty$ равен нулю. Интеграл вдоль действительной оси дает $f(z)$, а вклад от интеграла вдоль линии $\mathrm{Im}(w) = 2\pi$ равен $-\exp(-2\pi z)f(z)$. Единственный полюс подынтегрального выражения в уравнении (Е.24), охватываемый контуром, находится в точке $w = i\pi$; вычет в этой точке равен $-\exp(-\pi z)$. Таким образом,

$$K = f(z) - e^{-2\pi z}f(z) = -2\pi i e^{-\pi z}, \tag{E.25}$$

или

$$f(z) = \frac{\pi}{i\,\mathrm{sh}\ \pi z}. \tag{E.26}$$

Возвращаясь к уравнению (Е.22), имеем

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} dz\, e^{-izy}\left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}\ \pi z}\right)^5. \tag{E.27}$$

Здесь мы ввели $-i\varepsilon$ в пределы интегрирования как напоминание о том, что z имеет небольшую отрицательную мнимую часть. Постараемся вычислить

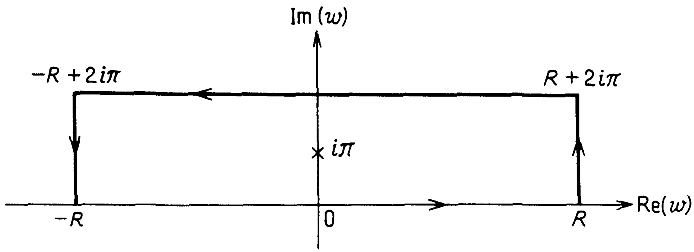

Рис. Е. 1. Контур интегрирования для уравнения (Е.24) с $R \to \infty$.

J путем нахождения удобного замкнутого контура. Если сделать подстановку

$$z = z' - i \tag{E.28}$$

в выражение (E.27), то находим

$$J = \frac{-e^{-y}}{2\pi i} \int_{-\infty - i\varepsilon + i}^{\infty - i\varepsilon + i} dz' \, e^{-iz'y} \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh} \quad \pi z} \right)^5 . \tag{E.29}$$

Уравнения (E.27) и (E.29) дают

$$(1 + e^y) J = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} + \int_{\infty - i\varepsilon + i}^{-\infty - i\varepsilon + i} \right] dz \, e^{-izy} \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh} \quad \pi z} \right)^5$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \, d^{-izy} \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh} \quad \pi z} \right)^5 . \tag{E.30}$$

Здесь мы замкнули контур, как показано на рис. E.2, где вертикальные отрезки не дают вклада в конечный результат. Единственный полюс, находящийся внутри контура, лежит в точке $z = 0$. Таким образом,

$$(1 + e^y) J = \text{ Вычет в } \; z = 0 \text{ от} \left[e^{-izy} \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh} \quad \pi z} \right)^5 \right] . \tag{E.31}$$

Вычет находится посредством разложения в ряд показательной функции и гиперболического синуса вблизи точки $z = 0$ и сравнения коэффициентов при члене $1/z$. Это дает

$$(1 + e^y) J = \frac{3\pi^4}{8} + \frac{5\pi^2}{12} y^2 + \frac{1}{24} y^4 . \tag{E.32}$$

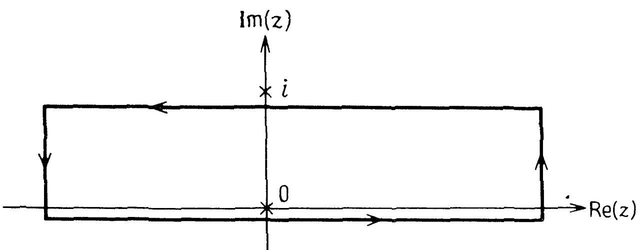

Рис. E. 2. Контур интегрирования для уравнения (E. 30).

Таким образом, уравнение (Е.19) дает

$$I = \int_0^\infty dy \left(\frac{3\pi^4}{8} y^3 + \frac{5\pi^2}{12} y^5 + \frac{1}{24} y^7 \right) (e^y + 1)^{-1}. \tag{Е.33}$$

Подынтегральное выражение в уравнении (Е.33) представляет собой энергетический спектр антинейтрино. Сам интеграл можно найти в справочнике Градштейна и Рыжика [234]. Он равен

$$I = \frac{11513\pi^8}{120960}. \tag{Е.34}$$

Использовав в уравнении (Е.18) результаты упражнения 11.1, наконец, получим

$$P \simeq 2{,}1 \times 10^{-30} \left(\frac{\rho}{\rho_{\rm nuc}} \right)^2 T_9^8, \tag{Е.35}$$

т.е. результат, использованный в уравнении (11.5.16).

Отметим, что в процессе вычисления мы пользовались массами свободных частиц для нуклонов m_j, а не их эффективными массами $m_j^* \leqslant m_j$. Эффективные массы учитывают нуклон-нуклонные взаимодействия между нуклонной системой из двух тел и окружающим нуклонным морем — системой многих тел. Учитывая существующие неопределенности в значениях эффективных масс, мы пренебрегали этой поправкой[1]).

[1]) Обсуждение этого вопроса см. в [211].