Скалярные и векторные теории поля

Читатели, вероятно, лучше всего знакомы с теорией электромагнитного поля. Это векторная теория, поскольку основная полевая переменная в лагранжиане — векторный потенциал A_α. Уравнения поля вытекают из принципа наименьшего действия:

$$\delta S = 0, \tag{Г.1}$$

где действие равно

$$S = \int \mathfrak{L}\, d^4x, \tag{Г.2}$$

а $\mathfrak{L}$ — плотность лагранжиана. Величина $\mathfrak{L}$ должна быть лоренцевским скаляром, так что действие S — это лоренц-инвариант.

Запишем

$$S = S_{\text{em}} + S_{\text{p}} + S_{\text{int}}. \tag{Г.3}$$

Здесь S_{em} — действие свободного электромагнитного поля, зависящее только от A_α, S_{p} — действие частиц, а S_{int} — член, описывающий взаимодействие.

Лагранжиан свободного поля равен

$$\mathfrak{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \tag{Г.4}$$

где тензор электромагнитного поля определен как

$$F_{\alpha\beta} \equiv A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}, \tag{Г.5}$$

а запятая означает частную производную. Определение (Г.5) автоматически гарантирует, что удовлетворяется половина уравнений Максвелла, а именно

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0. \tag{Г.6}$$

Оставшиеся уравнения Максвелла следуют из вариационного принципа. Уравнения Эйлера—Лагранжа для свободного поля таковы:

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_\alpha} \equiv \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right) = 0. \tag{Г.7}$$

Первый член в уравнении (Г.7) равен нулю для $\mathfrak{L}_{\mathrm{em}}$, а второй член дает

$$-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \qquad (\text{Г}.8)$$

Лагранжиан свободной частицы рассматривался в разд. 5.2. Удобнее использовать квадрат этого лагранжиана, так что

$$S_{\mathrm{p}} = \int L_{\mathrm{p}}\, d\tau \qquad (\text{Г}.9)$$

$$= \int \mathfrak{L}_{\mathrm{p}}\, d^4x, \qquad (\text{Г}.10)$$

где

$$L_{\mathrm{p}} = \tfrac{1}{2} m \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \qquad (\text{Г}.11)$$

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{p}} = \tfrac{1}{2} m \int \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \delta^4 \left[x^\gamma - z^\gamma(\tau) \right] d\tau. \qquad (\text{Г}.12)$$

Здесь $z^\alpha(\tau)$ — мировая линия частицы с массой m, а $u^\alpha = dz^\alpha/d\tau$ — 4-скорость. Для системы из N частиц следует брать сумму N членов, каждый из которых имеет вид (Г.9).

Если у частицы имеется заряд e, то ее 4-ток равен

$$J^\alpha = e \int u^\alpha \delta^4 \left[x^\beta - z^\beta(\tau) \right] d\tau. \qquad (\text{Г}.13)$$

Упражнение Г.1. Сделав замену переменных интегрирования в уравнении (Г.13) с τ на t, проверьте, что это уравнение эквивалентно выражениям

$$J^0 = e\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)], \qquad (\text{Г}.14)$$

$$\mathbf{J} = e\mathbf{v}\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)]. \qquad (\text{Г}.15)$$

Член, описывающий взаимодействие, равен

$$S_{\mathrm{int}} = \int L_{\mathrm{int}}\, d\tau \qquad (\text{Г}.16)$$

$$= \int \mathfrak{L}_{\mathrm{int}}\, d^4x, \qquad (\text{Г}.17)$$

где

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{int}} = J^\alpha A_\alpha, \qquad (\text{Г}.18)$$

$$L_{\mathrm{int}} = eA_\alpha u^\alpha. \qquad (\text{Г}.19)$$

Таким образом, уравнения Максвелла при наличии источников имеют вид

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_\alpha} = \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{em}}}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{int}}}{\delta A_\alpha} = 0, \qquad (\text{Г}.20)$$

или с учетом уравнений (Г.8) и (Г.18)

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha. \qquad (\text{Г}.21)$$

Уравнение движения для каждой частицы принимает вид

$$\frac{\delta L}{\delta z^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right) = 0, \qquad (\text{Г}.22)$$

где $L = L_{\text{p}} + L_{\text{int}}$. Из уравнений (Г.11) и (Г.19) следует (поскольку A_α является функцией z^α вдоль мировой линии частицы)

$$0 = eA_{\beta,\alpha}u^\beta - \frac{d}{d\tau}\left(m\eta_{\alpha\beta}u^\beta + eA_\alpha\right). \qquad (\text{Г}.23)$$

Таким образом, получаем соотношение

$$m\eta_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{d\tau} = e\left(A_{\beta,\alpha}u^\beta - A_{\alpha,\beta}u^\beta\right)$$

$$= eF_{\alpha\beta}u^\beta, \qquad (\text{Г}.24)$$

которое определяет силу Лоренца [см., например, [297], уравнение (11.144)].

Существуют стандартные приемы, позволяющие преобразовать любую теорию поля, заданную в лагранжевой форме, в гамильтонову форму и построить тензор энергии-импульса поля. Знаки членов свободного поля S_{em} и S_{p} определяются требованием, чтобы соответствующие свободные гамильтонианы (или, лучше, плотности энергии) были положительными. Знак S_{int} остается произвольным. Хотя изменение знака заряда изменяет знак поля, порождаемого зарядом, в уравнении (Г.21) результирующая сила, действующая на другой заряд, остается такой же благодаря компенсирующему изменению знака в уравнении (Г.24).

Электромагнетизм — это векторная теория поля для безмассовых частиц. В теории поля для частиц с массой имеется член

$$-\frac{1}{8\pi}\mu^2 A_\alpha A^\alpha, \qquad (\text{Г}.25)$$

добавляемый к плотности лагранжиана (Г.4). Уравнение (Г.21) принимает вид

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \mu^2 A^\alpha = 4\pi J^\alpha. \tag{Г.26}$$

Упражнение Г.2. Покажите, что условие сохранения заряда $J^\alpha, \alpha = 0$ автоматически гарантирует для векторного поля частиц ненулевой массы выполнение условия Лоренца

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = 0. \tag{Г.27}$$

Подставив уравнение (Г.5) в уравнение (Г.26), получим

$$A^{\beta,\alpha}{}_\beta - A^{\alpha,\beta}{}_\beta + \mu^2 A^\alpha = 4\pi J^\alpha. \tag{Г.28}$$

Поменяв порядок частных производных в первом члене, видим, что он равен нулю в соответствии с уравнением (Г.27). Второй член равен просто оператору Даламбера со знаком минус, так что

$$\Box A^\alpha - \mu^2 A^\alpha = -4\pi J^\alpha. \tag{Г.29}$$

Упражнение Г.3. Рассмотрите решения уравнения (Г.29) при $J^\alpha = 0$, имеющие вид плоских волн в вакууме :

$$A^\alpha = a^\alpha e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{Г.30}$$

где a^α — постоянная. Покажите, что

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = \mu^2, \tag{Г.31}$$

и сделайте отсюда вывод, что кванты соответствующего квантового поля обладают массой $\hbar\mu/c$.

Найдем теперь статическое взаимодействие между двумя покоящимися точечными «зарядами». Для заряда g, покоящегося в начале координат, можно записать [см. (Г.14) и (Г.15)]

$$J^0 = g\delta^3(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{J} = 0. \tag{Г.32}$$

Поэтому в уравнении (Г.29) можно положить

$$A^0 = \phi, \qquad \mathbf{A} = 0, \tag{Г.33}$$

где

$$\nabla^2\phi - \mu^2\phi = -4\pi g\delta^3(\mathbf{x}). \tag{Г.34}$$

Уравнение (Г.34) можно решить, например, при помощи преобразования

Фурье. В результате получается *потенциал Юкавы*

$$\phi = g\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{Г.35}$$

Обратите внимание, что в соответствии с уравнением (Г.24) сила, действующая на другой заряд g', равна

$$m\mathbf{a} = -g'\nabla\phi, \tag{Г.36}$$

так что *одноименные заряды взаимно отталкиваются.* Энергия взаимодействия между двумя равными зарядами *положительна,* и величина ее равна

$$V_{12} = g\phi = g^2\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{Г.37}$$

Теперь рассмотрим скалярное поле частиц с ненулевой массой. Плотности лагранжиана равны

$$\mathfrak{L}_{\text{field}} = -\frac{1}{8\pi}\left(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \mu^2\phi^2\right), \tag{Г.38}$$

$$\mathfrak{L}_{\text{int}} = -\rho\phi, \tag{Г.39}$$

а величина $\mathfrak{L}_{\text{p}}$ по-прежнему определяется уравнением (Г.12). Здесь ρ — плотность скалярного заряда

$$\rho = g\int d\tau\,\delta^4\left[x^\alpha - z^\alpha(\tau)\right]. \tag{Г.40}$$

Варьируя ϕ, получим уравнение поля

$$\Box\phi - \mu^2\phi = 4\pi\rho, \tag{Г.41}$$

а варьирование z^α дает уравнение движения частицы

$$m\eta_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{d\tau} = -g\frac{\partial\phi}{\partial z^\alpha}. \tag{Г.42}$$

Для точечного заряда, покоящегося в начале координат, получим

$$\nabla^2\phi - \mu^2\phi = 4\pi g\delta^3(\mathbf{x}), \tag{Г.43}$$

так что

$$\phi = -g\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{Г.44}$$

Таким образом, *одноименные скалярные заряды взаимно притягиваются.*

Энергия их взаимодействия

$$V_{12} = g\phi = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{Г.45}$$

отрицательна.

Отметим, что, поскольку частицы и античастицы обладают зарядами противоположного знака, силы между частицами и античастицами носят характер притяжения для векторных полей и отталкивания для скалярных полей.