

## Приложение И

# Перенос излучения

В этом разделе собраны основные соображения о переносе излучения в газовой среде. Для более подробного ознакомления отсылаем читателя к различным книгам Чандрасекара [115] (где особое внимание уделяется форме и решению уравнения переноса), Михаласа [406] (приложения к атмосферам звезд) или Рыбицкого и Лайтмана [493] (процессы излучения). Отличные обсуждения, касающиеся переноса излучения, можно найти в книгах Клейтона [135] (приложения к недрам звезд) и Зельдовича и Райзера [637] (приложения к явлению ударных волн).

### И.1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Напомним, что фундаментальной величиной, описывающей термодинамическое состояние ансамбля частиц — в данном случае фотонов, — служит функция распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  (см. гл. 2). Число фотонов в единице фазового объема  $d^3r d^3p$  с координатами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  в момент времени  $t$  связано с соотношением

$$d\mathcal{N} = \frac{2}{h^3} f d^3r d^3p = \frac{2}{c^3} f \nu^2 d\nu d\Omega d^3r, \quad (\text{И.1})$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света, а  $\nu$  — частота, связанная с импульсом соотношением  $p = h\nu/c$ . Направление распространения определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$ , которому соответствует элемент телесного угла  $d\Omega$ . Энергия, которую несут фотоны в этом объеме, выражается как

$$dE \equiv h\nu d\mathcal{N} \equiv \frac{I_\nu}{c} d\nu d\Omega d^3r. \quad (\text{И.2})$$

Выражение (И.2) в таком виде определяет величину  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ , связанную с  $f$  соотношением

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2} f(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{n}, t). \quad (\text{И.3})$$

Величина  $I_\nu$ , называемая *удельной интенсивностью*, определена таким образом, что  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\nu d\Omega$  описывает энергию фотонов в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , пересекающих в единицу времени единичный элемент поверхности с нормалью  $\mathbf{n}$  в пределах телесного угла  $d\Omega$ , ориентированного в

направлении  $\mathbf{n}$ . Итак, поле излучения полностью описывается любой из функций как  $I_\nu$ , так и  $f$ .

С функцией  $I_\nu$  связаны ее моменты. Так, величина

$$\epsilon_\nu^r(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \quad (\text{И.4})$$

дает удельную плотность энергии в точке  $\mathbf{r}$ , а векторная функция

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{4\pi} I_\nu \mathbf{n} d\Omega \quad (\text{И.5})$$

определяет *удельный поток* по направлению  $\mathbf{n}$ <sup>1)</sup>. Поэтому удельный поток через поверхность, с единичным нормальным вектором  $\mathbf{m}$  равен

$$F_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{m} = \int_{4\pi} I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (\text{И.6})$$

где  $\theta$  — угол между направлением распространения фотонов  $\mathbf{n}$  и нормалью к поверхности  $\mathbf{m}$ . Заметим, что если поле излучения изотропно, т.е.  $I_\nu$  не зависит от  $\mathbf{n}$ , то из уравнений (И.4) и (И.5) следует

$$\epsilon_\nu^r = \frac{4\pi I_\nu}{c} \quad (\text{изотропия}), \quad (\text{И.7})$$

$$\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Полные интенсивность, плотность энергии и поток получают интегрированием соответствующих монохроматических величин по частоте

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad \epsilon_r = \int_0^\infty \epsilon_\nu^r d\nu, \quad \mathbf{F} = \int_0^\infty \mathbf{F}_\nu d\nu. \quad (\text{И.8})$$

В особом случае, когда преобладает *локальное термодинамическое равновесие* (ЛТР), характеризуемое температурой  $T$ , величина  $I_\nu$  описывается функцией Планка

$$I_\nu = B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (\text{ЛТР}), \quad (\text{И.9})$$

а  $\epsilon_\nu^r$  и  $\epsilon_r$  определяются выражениями

$$\epsilon_\nu^r \equiv \epsilon_\nu^P = \frac{4\pi B_\nu}{c} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (\text{ЛТР}),$$

$$\epsilon_r \equiv \epsilon_P = aT^4, \quad (\text{И.10})$$

<sup>1)</sup> Термин «удельный» используется здесь для обозначения понятия «рассчитанный на единичный интервал частот»; в литературе употребляются и другие названия.

где  $a = 7,56 \cdot 10^{-15}$  эрг/(см<sup>3</sup> · град<sup>4</sup>) — постоянная плотности излучения, а индекс «P» означает «планковский».

При *строгом* термодинамическом равновесии  $\mathbf{F} = 0$  (никакого потока ни в каком направлении). Однако при ЛТР уравнения (И.9) и (И.10) можно использовать с высокой точностью даже в присутствии небольшого отличного от нуля потока  $\mathbf{F}$ , если градиент интенсивности (связанный, например, с градиентом температуры) мал.

Рассмотрим теперь излучение и поглощение фотонов в газовой среде. Определим коэффициент излучения, *излучательную способность*  $j_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ , так, чтобы величина  $j_\nu d\nu d\Omega$  представляла собой скорость спонтанного излучения энергии, приходящегося на единичный объем в интервале частот  $(\nu, \nu + d\nu)$  и направленного в пределах телесного угла  $\Omega$  вдоль вектора  $\mathbf{n}$  в момент времени  $t$ . Аналогичным образом определим коэффициент поглощения, или *непрозрачность*  $\kappa_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ , так, чтобы величина  $\kappa_\nu \rho I_\nu d\nu d\Omega$  представляла собой соответствующую энергию, поглощенную в единице объема в единицу времени из пучка данной интенсивности  $I_\nu$  (таким образом,  $\kappa_\nu$  измеряется в см<sup>2</sup>/г). Если допустить, что фотоны распространяются в среде прямолинейно, то полное изменение  $I_\nu$  на расстоянии  $ds$ , измеряемом вдоль светового пути в направлении  $\mathbf{n}$ , равно

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu - \kappa_\nu \rho I_\nu, \quad (\text{И.11})$$

где учитываются локальные изменения со временем и с расстоянием. Уравнение (И.11)—это *уравнение переноса излучения*. В типичных приложениях можно рассматривать газ в состоянии ЛТР в любой точке пространства и в любой момент времени. При таких условиях термодинамическое состояние газа можно описать двумя параметрами, например температурой и плотностью. Соответственно те функции, которые зависят от локального состояния вещества, например непрозрачность  $\kappa_\nu$ , будут зависеть только от  $\rho$  и  $T$ .

Во многих случаях, включая ЛТР,  $j_\nu$  и  $\kappa_\nu$  принимают относительные значения, характерные для строгого термодинамического равновесия, когда  $I_\nu \equiv B_\nu \equiv \text{const}$ . В этих случаях левая часть уравнения (И.11) обращается в нуль, что дает

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu \rho} = B_\nu(T), \quad (\text{И.12})$$

где  $T$  — локальная температура. Уравнение (И.12) известно как *закон Кирхгофа*; оно отображает детальное равновесие, которое должно существовать между поглощением и излучением в термодинамическом равновесии. Отметим, что стимулированное излучение может рассматриваться как процесс с «отрицательным поглощением», поскольку оно тоже пропорционально  $I_\nu$ . Таким образом, мы подразумеваем, что величина  $\kappa_\nu$  описывает также эффекты стимулированного излучения. В законе Кирхгофа  $\kappa_\nu$  явно включает в себя стимулированное излучение, как этого требует детальное равновесие.

Подстановка соотношения (И.12) в уравнение (И.11) дает следующий результат:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = \kappa_\nu \rho (B_\nu - I_\nu). \quad (\text{И.13})$$

Иногда полезно рассмотреть первый момент уравнения (И.13), получаемый интегрированием по  $d\Omega$  с использованием выражений (И.4), (И.5) и (И.10):

$$\frac{\partial \epsilon_\nu^r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = c \kappa_\nu \rho (\epsilon_\nu^p - \epsilon_\nu^r). \quad (\text{И.14})$$

Здесь предполагается, что непрозрачность  $\kappa_\nu$  изотропна. Уравнение (И.14) в сущности представляет собой «уравнение неразрывности» для излучения данной частоты, включающее источники и стоки излучения.

Формальное решение уравнения переноса излучения можно получить в предположении, что те функции, которые зависят от локального термодинамического состояния газа [например,  $B_\nu(T)$ ,  $\kappa_\nu(\rho, T)$ ], — это известные функции пространственных координат и времени. Для простоты предположим, что имеется стационарное состояние, и пренебрежем производными по времени в уравнении (И.13). В этом случае уравнение (И.13) можно рассматривать как обычное линейное дифференциальное уравнение для  $I_\nu$  вдоль направления распространения:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa_\nu \rho (B_\nu - I_\nu). \quad (\text{И.15})$$

Если определить *оптическую толщину*  $\tau_\nu$  вдоль направления распространения выражением

$$d\tau_\nu \equiv \kappa_\nu \rho ds, \quad (\text{И.16})$$

то можно проинтегрировать уравнение (И.15), чтобы получить интенсивность излучения из области, имеющей полную оптическую толщину  $\tau_\nu$ :

$$I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(T) \exp[-(\tau_\nu - \tau'_\nu)] d\tau'_\nu. \quad (\text{И.17})$$

Здесь  $I_\nu(0)$  — интенсивность излучения, падающего на заднюю сторону области, где по определению оптическая толщина  $\tau_\nu$  должна быть равна нулю. В общем случае температура среды может быть переменной, т.е.  $T = T(\tau_\nu)$ . Для особого случая, когда температура  $T$  постоянна, уравнение (И.17) дает

$$I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + B_\nu(T) [1 - \exp(-\tau_\nu)] \quad (T = \text{const}). \quad (\text{И.18})$$

Следовательно, для «оптически толстой» области, в которой  $\tau_\nu \gg 1$ ,

$$I_\nu \approx B_\nu(T), \quad \tau_\nu \gg 1. \quad (\text{И.19})$$

Соотношение (И.19) отражает тот факт, что излучение от изотермического, оптически толстого газового слоя не отличается от излучения черного тела, имеющего температуру газа. Для «оптически тонкого» слоя, у которого  $\tau_\nu \ll 1$ , в отсутствие падающего излучения [т.е.  $I_\nu(0) = 0$ ] интенсивность равна

$$I_\nu = \int_0^L j_\nu ds \approx B_\nu(T) \tau_\nu \quad (T = \text{const}), \quad (\text{И.20})$$

где  $L$  — полная геометрическая толщина слоя вдоль луча света. Таким образом, в оптически тонком слое поглощение испущенного излучения незначительно. Уравнение (И.20) справедливо независимо от того, изменяется ли  $T$  в пространстве или нет [сравните с уравнением (И.11)]. Заметим, что в зависимости от изменения непрозрачности с частотой область может быть оптически толстой на одних частотах и оптически тонкой на других.

## И.2. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнение переноса излучения значительно упрощается, когда поле излучения оказывается лишь слегка анизотропным. Умножим уравнение (И.13) на  $\mathbf{n}$  и проинтегрируем по всем углам. Заметив, что  $\kappa_\nu \rho B_\nu$  не зависит от направления и потому не вносит вклада в интеграл, и вспомнив определение (И.5) потока, получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_\nu + \int \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu) d\Omega = -\kappa_\nu \rho \mathbf{F}_\nu. \quad (\text{И.21})$$

Предположим далее, что излучение можно рассматривать как квазистационарное в каждый момент времени, в результате чего уравнение (И.21) сводится к виду

$$\int \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu) d\Omega = -\kappa_\nu \rho \mathbf{F}_\nu. \quad (\text{И.22})$$

Уравнение (И.22) остается справедливым, даже если поле излучения меняется со временем при условии, что эти изменения достаточно медленны и их можно описать посредством соответствующих изменений температуры и плотности газа со временем<sup>1)</sup>.

Теперь вспомним, что в строго изотропном поле излучения удельный поток  $\mathbf{F}_\nu$  равняется нулю. Для слегка анизотропного поля излучения можно оценить левую часть уравнения (И.22), если оставить только наиболее значущую изотропную часть  $I_\nu$ . Тогда  $i$ -компонент равен

$$\int n_i n_k \partial_k I_\nu d\Omega = (\partial_k I_\nu) \int n_i n_k d\Omega = (\partial_k I_\nu) \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} = \frac{c}{3} \partial_i \epsilon_\nu^r, \quad (\text{И.23})$$

<sup>1)</sup> Обсуждение этого вопроса см. в [637], разд. 11.6.

где использовалось уравнение (И.7). Таким образом, уравнение (И.23) принимает вид

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{c}{3\kappa_\nu\rho} \nabla \epsilon_\nu^r \quad (\text{И.24})$$

и вместе с уравнением (И.14) в квазистационарном пределе дает

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = c\kappa_\nu\rho(\epsilon_\nu^P - \epsilon_\nu^r), \quad (\text{И.25})$$

Взяты вместе, уравнения (И.24) и (И.25) составляют *диффузионное приближение* уравнений переноса излучения. Это приближение справедливо, если поле излучения изотропно на расстояниях, сравнимых со средней длиной свободного пробега фотонов:

$$\lambda_\nu \equiv \frac{1}{\kappa_\nu\rho} \quad (\text{И.26})$$

или малых по сравнению с ней. Заметим, что для применения диффузионного приближения ЛТР, вообще говоря, не требуется, т.е. ЛТР является достаточным, но не необходимым условием использования диффузионного приближения.

Предположим теперь, что ЛТР существует, и рассмотрим проинтегрированный по частотам вариант уравнения (И.24). При заданном ЛТР можно положить  $\epsilon_\nu^r = \epsilon_\nu^P$ , так что после интегрирования по  $\nu$  получаем

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \nabla \epsilon_\nu^P d\nu. \quad (\text{И.27})$$

Определив усредненную непрозрачность, или *росселандово среднее*, выражением

$$\frac{1}{\kappa} \equiv \frac{\int_0^\infty (1/\kappa_\nu)(d\epsilon_\nu^P/dT) d\nu}{\int_0^\infty (d\epsilon_\nu^P/dT) d\nu}, \quad (\text{И.28})$$

можно переписать уравнение (И.27) в следующем виде:

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{3\kappa\rho} \nabla \epsilon_P = -\frac{c}{3\kappa\rho} \nabla (aT^4). \quad (\text{И.29})$$

В дальнейшем иногда мы будем ставить черточку над  $\kappa$ , подчеркивая, что речь идет о *росселандовом среднем*.

*Упражнение И.1.* Покажите, что *росселандов* весовой множитель  $d\epsilon_\nu^P/dT$  имеет максимум при  $h\nu \approx 3,8 kT$ , так что главную роль в процессе переноса играют фотоны относительно высоких энергий.

Хотя все наше обсуждение до сих пор было сосредоточено на источниках непрозрачности, связанной с *истинным поглощением* [уравнение (И.12)], а не на источниках *рассеяния*, полученные результаты можно легко обобщить с учетом рассеяния. Если существует более одного источника

непрозрачности, уравнение (И.29) все еще применимо, но со средней по Росселанду непрозрачностью, определяемой соотношением

$$\frac{1}{\kappa} = \left\langle \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots} \right\rangle. \quad (\text{И.30})$$

Усреднение в уравнении (И.30) выполняется с учетом росселандова весового множителя. Непрозрачность, связанная с рассеянием, может быть включена в сумму, фигурирующую в уравнении (И.30), но, поскольку рассеяние не подчиняется закону Кирхгофа, поправка на стимулированное излучение в членах, описывающих рассеяние, отсутствует.

Для переноса излучения в сферических звездах уравнение (И.29) часто записывается в виде

$$L(r) = 4\pi r^2 F = -\frac{16\pi r^2 a c T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}, \quad (\text{И.31})$$

где  $L(r)$  — светимость (выражаемая в эрг/с) на расстоянии  $r$ . Для таких систем результирующий поток фотонов определяется температурным градиентом в недрах звезды.

Тепловая структура *атмосферы* излучающей области довольно просто может быть определена в диффузионном приближении. Предположим, что атмосфера рассматривается как полубесконечное, плоскопараллельное полупространство при ЛТР. Представим, что поток через атмосферу постоянный:

$$F = \text{const.} \quad (\text{И.32})$$

Уравнение (И.32) применимо с достаточной точностью к самым внешним слоям оптически толстой излучающей области, поскольку большая часть излучения испускается массой газа, расположенной значительно ниже поверхности. Уравнение (И.32) также следует непосредственно из уравнения (И.25), если предположить существование ЛТР. В этом случае  $\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = dF_\nu/dz = 0$ , где  $z$  — расстояние, измеренное в направлении внешней нормали к поверхности атмосферы. Если заменить  $z$  средней оптической толщиной  $\tau$ , причем

$$d\tau \equiv -\kappa\rho dz \quad (\text{И.33})$$

(знак минус означает, что оптическая толщина  $\tau$ , равная нулю на поверхности, *увеличивается* по мере продвижения в глубину атмосферы), то можно переписать уравнение (И.29) в виде

$$F = \frac{c}{3} \frac{d\epsilon_p}{d\tau} = \frac{c}{3} \frac{d(aT^4)}{d\tau}. \quad (\text{И.34})$$

Интегрирование уравнения (И.34) по  $\tau$  дает

$$\epsilon_p \equiv aT^4 = 3\tau \frac{F}{c} + \text{const.} \quad (\text{И.35})$$

Постоянную интегрирования в уравнении (И.35) можно определить, налагая граничные условия на поле излучения при  $\tau = 0$ . Если предположить, что поле излучения на поверхности изотропно в пределах внешней полусферы, но исчезает в пределах внутренней (т.е. ни один фотон не падает на поверхность из вакуума), то из уравнений (И.4) и (И.5) легко получить соотношение

$$F_\nu = \frac{c\epsilon'_\nu}{2}, \quad \tau_\nu = 0, \quad (\text{И.36})$$

или при ЛТР

$$F = \frac{c\epsilon_P}{2}, \quad \tau = 0. \quad (\text{И.37})$$

Подставив уравнение (И.37) в уравнении (И.35), получим профиль температуры вещества в единицах оптической толщины:

$$T^4 = T_0^4 \left( 1 + \frac{3\tau}{2} \right). \quad (\text{И.38})$$

В уравнении (И.38)  $T_0$  — температура поверхности, т.е.  $\epsilon_P(\tau = 0) = aT_0^4$ . Она следующим образом связана с эффективной температурой, определяемой соотношением  $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$ , где  $\sigma \equiv ac/4$ :

$$T_{\text{eff}} = 2^{1/4} T_0. \quad (\text{И.39})$$

Уравнение (И.39) часто называют «эддингтоновским приближением» атмосферного профиля. В соответствии с уравнениями (И.38) и (И.39) эффективная температура совпадает с температурой вещества при  $\tau = 2/3$ . Если в непрозрачности основную роль играют процессы истинного поглощения, то выходящие на поверхность фотоны возникают вблизи и выше слоя, для которого  $\tau \approx 2/3$  [сравните с уравнением (И.17)]. Таким образом, характерная спектральная температура фотонов («цветовая температура») будет сравнима с эффективной температурой. Если в непрозрачности преобладают процессы рассеяния, уравнение (И.38) по-прежнему описывает (правда, приближенно) профиль температуры. Однако выходящие на поверхность фотоны будут образовываться в типичных случаях гораздо глубже, скажем, при  $\tau \equiv \tau_s \gg 1$ . Появляясь под поверхностью на большой оптической глубине  $\tau_s$ , фотоны многократно испытывают рассеяние, прежде чем выйдут на поверхность. Если рассеяние упругое, то фотоны выходят на поверхность с цветовой температурой, которая сравнима с температурой вещества в точке их образования при  $\tau_s$ ; следовательно, цветовая температура  $T_{\text{col}} \approx T(\tau_s) \gg T_{\text{eff}}$ <sup>1)</sup>. Итак, упругое рассеяние приводит к увеличению характерной энергии выходящих на поверхность фотонов выше значения, соответствующего тепловому излучению черного тела.

<sup>1)</sup> Более детальное обсуждение см. в разд. 14.5 (к).



## И.3. ИСТОЧНИКИ НЕПРОЗРАЧНОСТИ

Перенос излучения в астрофизической плазме зависит от нескольких различных источников непрозрачности. Какой из них играет главную роль, зависит от термодинамического состояния газа, т.е. от  $\rho$  и  $T$ . Для многих обсуждающихся в этой книге приложений (например, исследование рентгеновских источников) могут оказаться важными нерелятивистские ( $h\nu \ll \ll m_e c^2$ ,  $kT \ll m_e c^2$ ) источники непрозрачности, которые рассматриваются ниже.

*Рассеяние на свободных электронах*

Сечение рассеяния фотонов на свободных электронах представляется формулой Томсона

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 0,665 \times 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (\text{И.40})$$

Это сечение не зависит от частоты фотона, и рассеяние является упругим. Соответствующая непрозрачность дается выражением

$$\kappa_{es} = \frac{\sigma_T n_e}{\rho} = 0,40 f_e \text{ см}^2/\text{г}, \quad (\text{И.41})$$

где  $n_e = f_e \rho / m_p$  — концентрация свободных электронов, а  $f_e$  — число свободных электронов, приходящееся на барион<sup>1)</sup>. Поскольку рассеяние электронов не зависит от частоты, Росселандово среднее для рассеяния  $\bar{\kappa}_{es}$  также определяется выражением (И.41).

*Свободно-свободное поглощение (обратное тормозное излучение)*

Непрозрачность для свободно-свободного поглощения (т.е. поглощения фотонов свободными электронами в присутствии положительных ионов с зарядом  $Z$  и атомным весом  $A$ ) дается выражением<sup>2)</sup>

$$\rho \kappa_\nu^{\text{ff}} = \frac{4(2\pi)^{1/2} e^6 Z^2 n_e n_i g_{\text{ff}}}{(3m_e)^{3/2} c (kT)^{1/2} h\nu^3} \left[ 1 - \exp\left( \frac{-h\nu}{kT} \right) \right], \quad (\text{И.42})$$

где  $n_i = f_i \rho / m_p A$  — концентрация ионов,  $f_i$  — доля атомов, ионизованных до заданного состояния, а  $g_{\text{ff}}$  — множитель Гаунта для свободно-свободных переходов, слегка меняющийся с частотой  $\nu$ . Приведенное выше выражение для непрозрачности основано на предположении, что электро-

<sup>1)</sup> Ранее число электронов, приходящихся на барион в полностью ионизованной плазме, обозначалось  $Y_e \equiv f_e$ .

<sup>2)</sup> См., например, [422, 549]; заметим, что величина  $\kappa_\nu$ , определенная в [549], соответствует введенной нами величине  $\rho \kappa_\nu$ .

ны обладают максвелловским распределением по скоростям относительно фотонов. Таблицы усредненных по максвелловскому распределению множителей Гаунта приведены в [240, 304]; для  $h\nu/kT \leq 1$  и  $kT \leq Z^2 R_y$   $g_{ff} \approx 1$ . Определенная уравнением (И.42) непрозрачность при свободно-свободных переходах может быть переписана в виде

$$\kappa_{\nu}^{ff} = (1,50 \times 10^{25}) \left( \frac{f_e f_i Z^2}{A} \right) \rho T^{-3,5} g_{ff} \left( \frac{1 - \exp(-x)}{x^3} \right) \text{см}^2/\text{г}, \quad (\text{И.43})$$

где  $x = h\nu/kT$ . Соответствующее росселандово среднее можно подсчитать из уравнений (И.28) и (И.43), что дает

$$\bar{\kappa}_{ff} = (0,645 \times 10^{23}) \left( \frac{f_e f_i Z^2}{A} \right) \bar{g}_{ff} \rho T^{-3,5} \text{см}^2/\text{г}, \quad (\text{И.44})$$

где  $\bar{g}_{ff} \sim 1$  — усредненный по частоте множитель Гаунта.

Отметим, что усредненная непрозрачность изменяется пропорционально  $\rho T^{-3,5}$ , как впервые было показано Крамерсом. Любая непрозрачность, которая так же зависит от  $\rho$  и  $T$ , называется *непрозрачностью Крамерса*.

Излучательная способность при свободно-свободных переходах может быть вычислена на основе закона Кирхгофа, т.е. из уравнений (И.12) и (И.42). Результат равен

$$j_{\nu}^{ff} = \frac{8}{3} \left( \frac{2\pi}{3} \right)^{1/2} \frac{e^6}{m_e^2 c^3} \left( \frac{m_e}{kT} \right)^{1/2} g_{ff} Z^2 n_e n_i \exp\left( \frac{-h\nu}{kT} \right) \\ = 5,44 \times 10^{-39} \frac{g_{ff} Z^2 n_e n_i}{T^{1/2}} \exp\left( \frac{-h\nu}{kT} \right) \text{эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{стер} \cdot \text{Гц}). \quad (\text{И.45})$$

Полное количество энергии, излученное при свободно-свободных переходах в единице объема за единицу времени, получается путем интегрирования уравнения (И.45) по всем частотам и умножения на  $4\pi$ :

$$\Lambda_{ff} = 1,42 \times 10^{-27} Z^2 n_e n_i T^{1/2} \bar{g}_{ff} \text{эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с}), \quad (\text{И.46})$$

где соответствующий средний множитель Гаунта  $\bar{g}_{ff}$  снова оказывается слабо изменяющейся функцией (порядка единицы).

### Поглощение при связанно-свободных переходах (фотоионизация)

Поглощение при связанно-свободных переходах происходит, когда атом со связанными электронами поглощает фотоны с энергией, достаточной для ионизации атома. Обратный процесс называется излучением при свободно-связанных переходах и является следствием захвата свободного электрона в связанное состояние, сопровождаемого излучением фотона, необходимость которого вытекает из условия сохранения энергии.

Поперечное сечение фотоионизации водородоподобного атома, находящегося в состоянии с главным квантовым числом  $n$ , можно записать в виде<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\sigma_{bf} &= \frac{64\pi^4 m_e e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} ch^6 n^5} \frac{g_{bf}}{\nu^3} \\ &= (2,82 \times 10^{29}) \frac{Z^4}{n^5 \nu^3} g_{bf} \text{ см}^2.\end{aligned}\quad (\text{И.47})$$

Из выражения (И.47) можно получить непрозрачность при связанно-свободных переходах и соответствующее росселандово среднее. Приближенное выражение этого среднего для смеси частично ионизованных атомов разных видов приведено в [516]:

$$\bar{\kappa}_{bf} \approx (4.34 \times 10^{25}) \bar{g}_{bf} Z(1 + X) \rho T^{-3.5} \text{ см}^2/\text{г}, \quad (\text{И.48})$$

где  $X$  и  $Z$  представляют соответственно относительную долю водорода и тяжелых элементов (т.е. всех других элементов, кроме водорода и гелия) в смеси. Заметим, что уравнение (И.48) также имеет вид закона непрозрачности Крамерса.

Хотя преобладает источник непрозрачности в любом диапазоне параметров определяется детальным поведением  $\rho$  и  $T$ , общая картина выглядит следующим образом. При низких температурах  $T$ , когда значительная часть атомов может быть лишь частично ионизована, важную роль играет поглощение при связанно-свободных переходах (при еще более низких температурах может доминировать непрозрачность, возникающая из-за дискретных «связанно-связанных» переходов<sup>2)</sup>). При больших значениях температуры  $T$ , когда ионизация уже почти завершена, будет преобладать поглощение при свободно-свободных переходах. Наконец, при дальнейшем увеличении  $T$  ведущая роль переходит к рассеянию на электронах, поскольку  $\bar{\kappa}_{ff}$  уменьшается с увеличением  $T$  [см. уравнение (И.44)]. При релятивистских энергиях фотонов ( $h\nu \gtrsim m_e c^2$ ) и температурах электронов ( $kT \gtrsim m_e c^2$ ) становятся важными другие процессы. В этом случае приведенные выше уравнения для тормозного излучения и рассеяния на электронах должны быть изменены<sup>3)</sup>.

### Комптонизация

Комптонизация — это такой процесс, при котором фотоны могут набирать или терять энергию в результате комптоновского рассеяния на тепловых электронах. Было доказано, что этот процесс должен быть важным

<sup>1)</sup> См. [135], уравнение (3.151).

<sup>2)</sup> Этот процесс называется также «поглощением в линиях». — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> Более подробное рассмотрение и ссылки см., например, в [65, 493].

для испускания рентгеновских лучей, которые излучаются газом при аккреции на компактные объекты. Ниже коротко рассматриваются основные особенности комптонизации<sup>1)</sup>.

Рассмотрим бесконечный и однородный максвелловский газ нерелятивистских электронов с температурой  $T$  и концентрацией  $n$ . Изменение во времени функции распределения фотонов  $f$ , связанное с многократным нерелятивистским обратным комптоновским рассеянием на этих электронах, определяется уравнением Компанейца [318]. Оно представляет собой приближение Фоккера—Планка к столкновительному уравнению Больцмана для фотонов и справедливо с точностью до квадрата передаваемой при столкновении энергии (эта величина мала, т.е.  $\Delta E \ll kT$ ). Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[ n_e \sigma_T c \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right) \right] \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) \right\}, \quad (\text{И.49})$$

где  $x = h\nu/kT$ . Как и следует ожидать, стационарное состояние достигается при

$$f = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] - 1}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \right), \quad (\text{И.50})$$

где  $\mu$  — постоянная. При  $\mu \leq 0$  уравнение (И.50) описывает общую равновесную функцию распределения газа Бозе—Эйнштейна, т.е. равновесие с сохраняемым числом частиц. Поскольку при комптонизации сохраняется число фотонов, уравнение (И.50) вполне применимо. Когда в результате многократных рассеяний фотонное распределение достигает бозе-эйнштейновского вида, соответствующего уравнению (И.50), процесс «насыщается» и дальнейший эффективный обмен энергии с электронами прекращается. В этом случае спектр фотонов принимает знакомую форму, определяемую законом Вина, когда  $f \ll 1$ :

$$I_\nu \propto x^3 f \propto x^3 \exp(-x). \quad (\text{И.51})$$

Эффективная скорость передачи энергии от электронов фотонам в единице объема  $\Lambda_{\text{Комп}}$  находится умножением уравнения (И.49) на  $h\nu$  и интегрированием по фазовому пространству. После выполнения интегрирования по частям результат принимает вид [452]

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{Комп}} &= \int h\nu \frac{\partial f}{\partial t} \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} = \\ &= 4\sigma_T n_e c \epsilon_r \left[ \frac{kT}{m_e c^2} - \frac{2\pi(kT)^5}{(hc)^3 m_e c^2 \epsilon_r} \int_0^\infty dx x^4 f (1 + f) \right], \end{aligned} \quad (\text{И.52})$$

<sup>1)</sup> Более подробное обсуждение содержится в работах, указанных в разд. 14.5 (к).

где  $\varepsilon_r$  — плотность энергии фотонов, определяемая соотношением

$$\varepsilon_r \equiv \frac{8\pi(kT)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty dx x^3 f. \quad (\text{И.53})$$

Если предположить, что распределение фотонов можно аппроксимировать равновесным планковским распределением, но при температуре  $T_{\text{ph}} \neq T$ , уравнение (И.52) даст

$$\Lambda_{\text{Comp}} = 4\sigma_T n_e c \varepsilon_r \frac{k}{m_e c^2} (T - T_{\text{ph}}) \quad (\text{И.54})$$

Уравнение (И.54) показывает, что комптонизация приводит к охлаждению вещества, когда  $T > T_{\text{ph}}$ , и нагреву, когда  $T < T_{\text{ph}}$ .

Рассмотрим видоизменение уравнения (И.49) в том случае, когда выходящие фотоны испускаются в среде с *конечной* глубиной рассеяния  $\tau_{\text{es}}$  (например, в однородном диске с полутолщиной  $h$ , где  $\tau_{\text{es}} \approx \sigma_T n_e h$  отсчитывается от средней плоскости диска). Предположим, что фотоны стационарно образуются при относительно низкой энергии в диске ( $x \ll 1$ ), диффундируют наружу к поверхности, испытывая многократное рассеяние и покидают диск. Вероятность ускользания типичного фотона на одно комптоновское рассеяние приближенно можно считать обратно пропорциональной среднему числу столкновений  $N_s$ .

В нашем случае

$$N_s \approx \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2), \quad (\text{И.55})$$

поскольку  $\tau_{\text{es}} \leq 1$  приводит к свободному уходу, а при  $\tau_{\text{es}} \geq 1$  фотон до ухода испытывает случайное блуждание в среде. В стационарном состоянии можно записать «модифицированное» уравнение Компанейца, описывающее рождение, комптонизацию и уход фотонов из среды [534]:

$$0 = \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) \right] + Q(x) - \frac{f}{\text{Max}(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2)}, \quad (\text{И.56})$$

где функция  $Q(x)$  описывает скорость рождения фотонов. Предположим, что фотоны рождаются с какой-то низкой энергией  $x_s \ll 1$ , выше которой величина  $Q$  пренебрежимо мала («источник мягких фотонов»). Сконцентрируем внимание на таких выходящих комптонизированных фотонах с  $x \gg x_s$ , для которых в уравнении (И.56) можно пренебречь членами  $f^2 \ll 1$  и  $Q$ . В этом случае получающееся уравнение дает следующее приближенное решение:

$$f \propto x^m, \quad x_s \ll x \ll 1, \quad (\text{И.57})$$

$$m = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}}, \quad y \equiv \frac{4kT}{m_e c^2} N_s, \quad (\text{И.58})$$

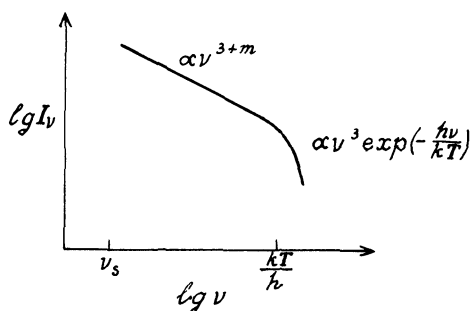


Рис. И.1. Спектр, излучаемый при комптонизации фотонов низких энергий высокоэнергичными тепловыми электронами [493]

и

$$f \propto \exp(-x), \quad x \gg 1. \quad (\text{И.59})$$

Интенсивность выходящего излучения в этой области  $x_s \ll x \ll 1$  имеет степенной вид

$$I_\nu \sim I_{\nu_s} \left( \frac{\nu}{\nu_s} \right)^{3+m}. \quad (\text{И.60})$$

Таким образом, при  $y \geq 1$  или  $m \geq -4$  в результате комптонизации может происходить значительное усиление «жесткого спектрального» компонента (с энергией выше  $\nu_s$ ); выходящего из среды излучения. Этот эффект возникает вследствие многократного «рассеяния с набором энергии» мягких фотонов на электронах с более высокой температурой. Спектр выходящего из среды излучения проиллюстрирован на рис. И.1.