Приложение В

Вычисление интеграла в уравнении (8.4.6)

Как отмечалось в тексте, требуется рассмотреть лишь случай $b < 2R$. Интеграл может быть вычислен посредством трудоемкого прямого геометрического определения области интегрирования. Мы предлагаем здесь альтернативный метод, основанный на представлении ступенчатой функции в виде

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} dk, \tag{B.1}$$

причем контур, по которому ведется интегрирование, проходит на бесконечно малом расстоянии ниже начала координат вблизи $k = 0$. Уравнение (B.1) можно проверить, замыкая контур в верхней полуплоскости для $x > 0$ и в нижней полуплоскости для $x < 0$.

Таким образом,

$$\Omega^2 P(b, R) \equiv I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikb}}{k} dk \int\int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 e^{-ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{B.2}$$

Теперь используем разложение[1]

$$e^{-ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{d}{dk} 4\pi k \sum_{l,\, m} j_l(kr_<) h_l^{(1)*}(kr_>) Y_{lm}^*(\Omega_1) Y_{lm}(\Omega_2). \tag{B.3}$$

В интеграл (B.2) вклад обеспечивают только члены с $l = m = 0$, так что

$$I = \frac{(4\pi)^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{ikb}}{k} \frac{d}{dk} k \int_0^R r_1^2\, dr_1 \int_0^R r_2^2\, dr_2\, j_0(kr_<) h_0^{(1)*}(kr_>). \tag{B.4}$$

Теперь запишем

$$\int_0^R dr_2 = \int_0^{r_1} dr_2 + \int_{r_1}^R dr_2. \tag{B.5}$$

[1] Это разложение получается, если взять производную d/dk от комплексно-сопряженного выражения уравнения (16.22) из монографии Джексона [297].

В первом интеграле $r_< = r_2$ и $r_> = r_1$, а во втором эти обозначения поменялись местами. Используя соотношения

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad h_0^{(1)*}(x) = \frac{ie^{-ix}}{x}, \tag{B.6}$$

находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{(4\pi)^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{ikb}}{k}\frac{d}{dk}\int_0^R dr_1\left[e^{-ikR}\left(\frac{i}{k^3} - \frac{R}{k^2}\right)r_1 \sin kr_1 - \frac{ir_1^2}{k^2}\right] \\ &= \frac{(4\pi)^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[e^{ikb}\left(\frac{2iR^3}{3k^4} - \frac{3R^2}{2k^5} - \frac{5}{2k^7}\right) + \right. \\ &\left. + e^{ik(b-2R)}\left(-\frac{iR^3}{k^4} - \frac{R^2}{2k^5} + \frac{5iR}{k^6} + \frac{5}{2k^7}\right)\right]. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Поскольку $b < 2R$, член, пропорциональный $\exp[ik(b - 2R)]$, не дает никакого вклада, что можно показать, если замкнуть контур в нижней полуплоскости. По теореме о вычетах получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{ikb}}{k^n} = \frac{(ib)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{B.8}$$

и тогда

$$I = \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^2 \frac{b^3}{R^3}\left(1 - \frac{9}{16}\frac{b}{R} + \frac{b^3}{32R^3}\right), \tag{B.9}$$

что совпадает с результатом, приведенным в тексте.

Читатель может проверить, что если $b > 2R$, вклад второго члена уравнения (B.7) в результат (B.9) приводит к следующему выражению:

$$I_{b>2R} = \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^2. \tag{B.10}$$

Этот результат получается тривиально, если обратить внимание, что при $b > 2R$ ступенчатая функция, входящая в определение I [уравнение (B.2)], всегда равна единице.