Приложение 3

Гидродинамика течения вязкой жидкости

Уравнение движения нерелятивистской вязкой жидкости имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underset{\sim}{t}, \tag{3.1}$$

где тензор вязких напряжений $\underset{\sim}{t}$ имеет компоненты

$$t_{ij} = t_{ji} = \eta\left(v_{i,j} + v_{j,i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}v_{k,k}\right), \tag{3.2}$$

а его след равен нулю. Здесь $\eta(\eta > 0)$ — коэффициент динамической, или сдвиговой, вязкости; объемной вязкостью мы пренебрегаем[1]. Когда $\underset{\sim}{t} = 0$, уравнение (3.1) переходит в уравнение Эйлера для идеальной жидкости.

Чтобы найти скорость нагрева жидкости в результате вязкостной диссипации, рассмотрим скорость изменения энергии единицы массы жидкости (измеряемой при совместном движении с жидкостью):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + u\right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{du}{dt}. \tag{3.3}$$

Здесь u — внутренняя энергия на единицу массы, а du/dt дается первым законом термодинамики (6.1.8). Выражая $d\mathbf{v}/dt$ при помощи уравнения (3.1), а $d\rho/dt$ — при помощи уравнения неразрывности (6.1.1), находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + u\right) = -\frac{1}{\rho}\mathbf{v} \cdot \nabla P + \frac{1}{\rho}\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \underset{\sim}{t}) - \frac{P}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} + T\frac{ds}{dt}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot (P\mathbf{v} - \underset{\sim}{t} \cdot \mathbf{v}) + T\frac{ds}{dt} - \frac{1}{\rho}t_{ij}v_{i,j}. \tag{3.4}$$

Находящийся в правой части уравнения (3.4) член типа дивергенции представляет собой скорость, с которой производится работа над единичной массой жидкости, так что, если проинтегрировать по массе элемента жидкости объемом $\mathcal{V}$, получим

$$\int \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (P\mathbf{v} - \underset{\sim}{t} \cdot \mathbf{v})\rho\, d\mathcal{V} = \int (P\mathbf{v} - \underset{\sim}{t} \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$= \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}\, dA,$$

[1] См. книгу Ландау и Лифшица [339], гл. 2, для выяснения всех деталей.

где

$$\mathbf{f} = P\mathbf{n} - \underset{\sim}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} \tag{3.5}$$

— внешняя сила (на единицу площади), действующая на поверхность, нормаль к которой определяется единичным вектором $\mathbf{n}$.

Таким образом, два оставшихся члена в уравнении (3.4), связанные с внутренним нагревом, должны полностью сбалансироваться:

$$\begin{aligned} \rho T \frac{ds}{dt} &= v_{i,j} t_{ij} \\ &= \tfrac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) t_{ij} \quad (\text{т. к. } t_{ij} \text{ симметричен}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} t_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij} v_{k,k}\right) t_{ij} \\ &= \frac{1}{2\eta} t_{ij} t_{ij}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

поскольку след $\underset{\sim}{t} = t_{ij}\delta_{ij} = 0$. Уравнение (3.6) показывает, что возрастание энтропии зависит от квадрата отклонения от равновесия (т.е. от квадрата градиента скорости). Этого и следовало ожидать, так как энтропия имеет максимум в равновесном состоянии.

Ограничимся теперь кеплеровским аккреционным диском, где у скорости в сущности имеется только ϕ-компонент (т.е. $v_z \ll v_r \ll v_\phi$):

$$v_\phi \simeq r\Omega = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

В циклических координатах единственным компонентом $\underset{\sim}{t}$, которым нельзя пренебрегать, оказывается [см. [339], уравнение (15.15)]

$$t_{r\phi} = t_{\phi r} = \eta\left(\frac{1}{r} v_{r,\phi} + v_{\phi,r} - \frac{v_\phi}{r}\right). \tag{3.8}$$

Используя выражение (3.7), находим

$$t_{r\phi} \simeq -\frac{3}{2}\eta\Omega = -\frac{3}{2}\eta\left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Вязкостная сила в направлении ϕ, вызываемая трением между соседними элементами жидкости, приводит к тормозящему моменту, который уносит момент количества движения наружу за пределы системы. Нормаль к поверхности, разделяющей соседние элементы жидкости, в данном случае направлена радиально, так что описываемая уравнением (3.5) сила должна иметь вид

$$f_\phi = -t_{\phi r}. \tag{3.10}$$