Приложение Ж

# Сферически симметричная аккреция на черную дыру: релятивистские уравнения

В этом приложении мы обсудим общие релятивистские аналоги уравнений Бонди [78] для сферически симметричной непрерывной адиабатической аккреции на шварцшильдовскую черную дыру с массой $M$. Мы покажем, что релятивистские уравнения для аккреции на черную дыру требуют перехода к сверхзвуковому течению.

Граничные условия на бесконечности остаются теми же, что и раньше: газ покоится; концентрация барионов равна $n_\infty$; плотность массы покоя — $mn_\infty$, где $m$ — средняя масса бариона; *полная* плотность массы-энергии $\rho_\infty$. Как обычно, связь между полной плотностью массы-энергии и плотностью энергии, соответствующей массе покоя, дается соотношением

$$\rho = mn + \varepsilon', \tag{Ж.1}$$

где $\varepsilon'$ — плотность внутренней энергии. (В этом приложении используется система единиц $c = G = 1$.) Для адиабатического течения известно, что $P = P(n)$, и этого условия вполне достаточно для доказательства околозвукового характера течения. Основными уравнениями являются следующие: уравнение сохранения барионов

$$(nu^\alpha)_{;\alpha} = 0, \tag{Ж.2}$$

уравнение сохранения импульса (релятивистское уравнение Эйлера)

$$(\rho + P)u_{\alpha;\beta}u^\beta = -P_{,\alpha} - u_\alpha P_{,\beta}u^\beta, \tag{Ж.3}$$

и уравнение сохранения массы-энергии [уравнение энтропии, см. уравнение (2.1.3)]

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) + P\,d\left(\frac{1}{n}\right) = T\,ds = 0. \tag{Ж.4}$$

Читателю, незнакомому с тензорным исчислением, придется принять на веру, что уравнения (Ж.2) и (Ж.3) — это релятивистские обобщения уравнений (6.1.1) и (6.1.2) (см., например, [411]). Здесь $u^\alpha$ означают компоненты 4-скорости жидкости. Уравнение (Ж.4) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P}{n}, \tag{Ж.5}$$

который окажется полезным в дальнейшем.

Уравнения (Ж.2) и (Ж.3) можно записать в шварцшильдовских координатах в виде

$$\frac{n'}{n} + \frac{u'}{u} + \frac{2}{r} = 0, \tag{Ж.6}$$

и

$$uu' = -\frac{1}{\rho + P}\frac{dP}{dr}\left(1 + u^2 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{\dot{M}}{r^2}, \tag{Ж.7}$$

где штрих означает дифференцирование по $r$, а $u$ означает направленную внутрь радиальную компоненту скорости $u \equiv |u^r|$. Определим скорость звука в соответствии с соотношением

$$a^2 \equiv \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dn}\frac{n}{\rho + P}, \tag{Ж.8}$$

где мы воспользовались уравнением (Ж.5). Теперь можно записать уравнение (Ж.7) в виде

$$uu' + \frac{M}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)a^2\frac{n'}{n} = 0, \tag{Ж.9}$$

где использовано равенство $P' = (dP/dn)n'$. Сразу же видно, что уравнения (Ж.6) и (Ж.9) представляют собой релятивистские обобщения уравнений (14.3.6) и (14.3.7).

Продолжая, как и в ньютоновском случае, стремиться к решению относительно $u'$ и $n'$, получаем

$$u' = \frac{D_1}{D}, \qquad n' = \frac{-D_2}{D}, \tag{Ж.10}$$

где

$$D_1 = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)\frac{2a^2}{r} - \frac{M}{r^2}\right], \tag{Ж.11}$$

$$D_2 = \frac{2u^2/r - M/r^2}{u}, \tag{Ж.12}$$

и

$$D = \frac{u^2 - \left(1 - 2M/r + u^2\right)a^2}{un}. \tag{Ж.13}$$

Теперь докажем, что при любом уравнении состояния, удовлетворяющем релятивистскому условию $a^2 < 1$ (см. разд. 9.5), течение должно проходить через критическую точку, расположенную вне горизонта событий ($r = 2M$). При больших значениях $r$, как мы знаем, течение удовлетворяет условию $u^2 \ll 1$ и является дозвуковым: $u^2 < a^2$ (например, при $r \to \infty$, $u \to 0$, $a \to a_\infty$), поэтому из уравнения (Ж.13) следует

$$D \simeq \frac{u^2 - a^2}{un} < 0. \tag{Ж.14}$$

Однако при $r = 2M$ получаем

$$D = \frac{u}{n}(1 - a^2) > 0, \tag{Ж.15}$$

поскольку $a^2 < 1$. Таким образом, величина $D$ должна пройти через нуль в некоторой точке $r = r_s$ вне $r = 2M$. Чтобы избежать особенностей в течении, необходимо с учетом (Ж.10) потребовать выполнения соотношений

$$D_1 = D_2 = D = 0 \quad \text{при } r = r_s.$$

Из уравнений (Ж.11)—(Ж.13) находим, что при $r = r_s$

$$u_s^2 = \frac{a_s^2}{1 + 3a_s^2} = \frac{M}{2r_s}. \tag{Ж.17}$$

Заметим, что собственная скорость жидкости $v^{\hat r}$, измеряемая локальным неподвижным наблюдателем, связана с $u$ отношением

$$v^{\hat r} = \frac{u^{\hat r}}{u^{\hat t}} = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat r}}{-\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat t}} = \frac{u^r}{u^t} \frac{1}{1 - 2M/r} \tag{Ж.18}$$

(см. разд. 12.2 и 12.4). Используя равенство $-1 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$, которое дает

$$-1 = -(u^t)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{(u^r)^2}{1 - 2M/r}, \tag{Ж.19}$$

находим, что уравнение (Ж.18) принимает вид

$$|v^{\hat r}| = \frac{u}{(1 - 2M/r + u^2)^{1/2}}. \tag{Ж.20}$$

Итак, в соответствии с уравнением (Ж.20) при больших значениях $r \gg 2M$, где $u \ll 1$, имеем $|v^{\hat r}| \simeq u$; по мере того как $r \to \infty$, собственная скорость течения $v^{\hat r} \to 0$, оставаясь дозвуковой. При $r = 2M$ получаем $|v^{\hat r}| \equiv 1 > a$ и собственная скорость, равная скорости света, оказывается сверхзвуковой. Существенно, что $|v^{\hat r}| \equiv 1$ при $r = 2M$ *независимо* от величины $u$. Таким образом, одно лишь требование, чтобы собственная скорость равнялась скорости света на горизонте, само по себе вовсе не гарантирует прохождение течения через критическую точку вне $r = 2M$ вопреки тому, как иногда утверждается.

Чтобы продвинуться дальше, придадим уравнениям (Ж.6) и (Ж.9) вид уравнений сохранения [403]. Это дает

$$4\pi m n u r^2 = \dot{M} = \text{const (не зависит от } r) \tag{Ж.21}$$

и

$$\left(\frac{\rho + P}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right) = \text{const} = \left(\frac{\rho_\infty + P_\infty}{n_\infty}\right)^2. \tag{Ж.22}$$

**Уравнение** (Ж.21) дает темп аккреции массы покоя, а уравнение (Ж.22) является релятивистским уравнением Бернулли.

Чтобы подсчитать точное значение $\dot{M}$, нам необходимо принять уравнение состояния. Вслед за Бонди [78] предположим политропное уравнение состояния

$$P = K n^\Gamma, \qquad K, \Gamma \text{ const}. \tag{Ж.23}$$

Подстановка уравнения (Ж.23) в уравнение (Ж.4) дает

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = K n^{\Gamma - 2}\, dn. \tag{Ж.24}$$

Интегрирование приводит к следующему результату:

$$\rho = mn + \frac{K n^\Gamma}{\Gamma - 1}, \tag{Ж.25}$$

где постоянная интегрирования $m$ вычисляется посредством сравнения с уравнением (Ж.1). Следовательно,

$$\frac{\rho + P}{n} = m + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} K n^{\Gamma - 1}, \tag{Ж.26}$$

и, согласно выражению (Ж.8),

$$a^2 = \frac{\Gamma K n^{\Gamma - 1}}{m + \Gamma K n^{\Gamma - 1}/(\Gamma - 1)}, \tag{Ж.27}$$

или

$$\Gamma K n^{\Gamma - 1} = \frac{a^2 m}{1 - a^2/(\Gamma - 1)}. \tag{Ж.28}$$

Подстановка уравнений (Ж.26) и (Ж.28) в уравнение (Ж.22) дает

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)\left(1 + \frac{a^2}{\Gamma - 1 - a^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{a_\infty^2}{\Gamma - 1 - a_\infty^2}\right)^2. \tag{Ж.29}$$

Преобразуя обе части уравнения (Ж.29) и производя вычисления в «звуковой» точке при помощи уравнения (Ж.17), получаем

$$\left(1 + 3a_s^2\right)\left(1 - \frac{a_s^2}{\Gamma - 1}\right)^2 = \left(1 - \frac{a_\infty^2}{\Gamma - 1}\right)^2. \tag{Ж.30}$$

Теперь можно ожидать, что при больших $r \geqslant r_s$ барионы должны быть нерелятивистскими с $a \leqslant a_s \ll 1$ (т.е. $T \ll mc^2/k = 10^{13}$ К), если они были нерелятивистскими на бесконечности (т.е. $a_\infty \ll 1$). Разлагая уравнение (Ж.30) по степеням $a_s^2$ и $a_\infty^2$ до первых неисчезающих членов, находим

$$\begin{aligned} a_s^2 &\approx \frac{2}{5 - 3\Gamma} a_\infty^2, \qquad \Gamma \neq \tfrac{5}{3}, \\ &\approx \tfrac{2}{3} a_\infty, \qquad \Gamma = \tfrac{5}{3}. \end{aligned} \tag{Ж.31}$$

Уравнение (Ж.31) подтверждает наши ожидания, что из условия $a_\infty \ll 1$ следует $a_s \ll 1$.

---

*Упражнение Ж.1.* Получите критический радиус в единицах $M$ и $a_\infty$ для $1 \leqslant \Gamma < 5/3$ и сравните с результатом в ньютоновском приближении — уравнением (14.3.14).

*Ответ:*

$$r_s \approx \frac{5 - 3\Gamma}{4} \frac{M}{a_\infty^2}, \qquad \Gamma \neq \frac{5}{3},$$

$$r_s \approx \frac{3}{4} \frac{M}{a_\infty}, \qquad \Gamma = \frac{5}{3}.$$

---

Теперь уравнение (Ж.28) для $a^2/(\Gamma - 1) \ll 1$ дает

$$\frac{n_s}{n_\infty} \approx \left(\frac{a_s}{a_\infty}\right)^{2/(\Gamma - 1)}. \tag{Ж.32}$$

Следовательно, темп аккреции равен

$$\dot{M} = 4\pi m n_s u_s r_s^2 \approx 4\pi \lambda_s M^2 m n_\infty a_\infty^{-3}, \tag{Ж.33}$$

где мы использовали уравнения (Ж.21), (Ж.17), (Ж.31) и (Ж.32). Безразмерный параметр аккреции $\lambda_s$ в уравнении (Ж.33) определен для $1 \leqslant \Gamma \leqslant 5/3$ уравнением (14.3.17). Таким образом, мы нашли, что темп аккреции в первом приближении с учетом релятивистских поправок равен результату Бонди [78] для ньютоновского околозвукового течения. Эквивалентность ньютоновского выражения результату, полученному в рамках общей теории относительности, вполне объяснима с физической точки зрения: критический темп аккреции определяется условиями в одной и той же звуковой точке $r = r_s$, которая лежит вне горизонта ($r_s \gg 2M$) и не подвержена влиянию нелинейной гравитации. С другой стороны, условие регулярности, налагаемое на решение с релятивистским течением вне горизонта, делает необходимым определить в первую очередь околозвуковое течение!

Для оценок параметров течения при малых радиусах $r \ll r_s$ заметим прежде всего, что, поскольку течение является околозвуковым с $u > a$, уравнение (Ж.29) требует, чтобы при $\Gamma \neq 5/3$

$$u^2 \approx \frac{2M}{r}, \qquad r \ll r_s \quad \left(\Gamma \neq \frac{5}{3}\right). \tag{Ж.34}$$

Из соотношений (Ж.21), (Ж.33) и (Ж.34) можно подсчитать степень сжатия газа

$$\frac{n(r)}{n_\infty} \approx \frac{\lambda_s}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{a_\infty^2 r}\right)^{3/2}. \tag{Ж.35}$$

Предположив, что газ подчиняется распределению Максвелла — Больцмана с давлением $P = nkT$, где $T$ — температура, с учетом (Ж.23) для адиабатического температурного профиля, имеем следующее выражение:

$$\frac{T(r)}{T_\infty} = \left(\frac{n(r)}{n_\infty}\right)^{\Gamma-1} \approx \left(\frac{\lambda_s}{\sqrt{2}}\right)^{\Gamma-1}\left(\frac{M}{a_\infty^2 r}\right)^{3/2(\Gamma-1)}. \tag{Ж.36}$$

На горизонте событий (индекс «$h$») в этом случае находим независимо от массы $M$ черной дыры

$$u_h \approx 1 \quad \left(\Gamma \neq \tfrac{5}{3}\right),$$

$$\frac{n_h}{n_\infty} \approx \frac{\lambda_s}{4}\left(\frac{c}{a_\infty}\right)^3, \qquad \frac{T_h}{T_\infty} \approx \left[\frac{\lambda_s}{4}\left(\frac{c}{a_\infty}\right)^3\right]^{\Gamma-1}, \tag{Ж.37}$$

где мы ввели скорость света $c$.

Числовые коэффициенты в приведенных выше выражениях для особого случая $\Gamma = 5/3$ несколько иные. В этом случае $a$ остается сравнимой с $u$ внутри околозвуковой области. Поскольку в соответствии с уравнением

(Ж.31) $a^2 \sim a_\infty^2$ для $r < r_s$, в уравнении (Ж.29) можно положить правую часть равной единице при $r = 2M$, что дает

$$u_h\left(1 + \frac{a_h^2}{\frac{2}{3} - a_h^2}\right) \approx 1. \qquad (Ж.38)$$

С использованием уравнения (Ж.27) это соотношение принимает вид

$$u_h\left(1 + \frac{5Kn_h^{2/3}}{2m}\right) \approx 1. \qquad (Ж.39)$$

Теперь уравнения (Ж.21) и (Ж.33) дают при $\lambda_s = 1/4$

$$n_h = \frac{n_\infty}{16a_\infty^3 u_h}. \qquad (Ж.40)$$

Поскольку в соответствии с уравнением (Ж.27)

$$a_\infty^2 \approx \frac{5Kn_\infty^{2/3}}{3m}, \qquad (Ж.41)$$

уравнение (Ж.39) принимает вид

$$u_h + \frac{3}{2^{11/3}} u_h^{1/3} - 1 \approx 0. \qquad (Ж.42)$$

Численное решение уравнения (Ж.42) дает следующий результат:

$$u_h \approx 0{,}782 \quad \left(\Gamma = \tfrac{5}{3}\right). \qquad (Ж.43)$$

Теперь из уравнения (Ж.40) следует

$$\frac{n_h}{n_\infty} \approx \frac{1}{16u_h}\left(\frac{c}{a_\infty}\right)^3, \qquad \frac{T_h}{T_\infty} \approx \left(\frac{1}{16u_h}\right)^{2/3}\left(\frac{c}{a_\infty}\right)^2. \qquad (Ж.44)$$

Проведем численные оценки соотношений (Ж.44) в случае нерелятивистских барионов, аккрецируемых из межзвездной среды. Скорость звука в окружающей среде равна

$$a_\infty \approx \left(\frac{5}{3}\frac{kT_\infty}{m_B}\right)^{1/2} \approx 11{,}7\left(\frac{T_\infty}{10^4\ \mathrm{K}}\right)^{1/2} \text{ км/с}. \qquad (Ж.45)$$

Подстановка уравнений (Ж.43) и (Ж.45) в (Ж.44) дает

$$\frac{n_h}{n_\infty} \approx 1{,}33 \times 10^{12} \left( \frac{T_\infty}{10^4\,\mathrm{K}} \right)^{-3/2},$$

$$T_h \approx \frac{3}{40} \left( \frac{2}{u_h^2} \right)^{1/3} \frac{m_B c^2}{k} \approx 1{,}21 \times 10^{12}\,\mathrm{K}. \tag{Ж.46}$$

Таким образом, температура $T_h$ не зависит от $T_\infty$. Причина в том, что при $\Gamma = 5/3$ значительная доля гравитационной потенциальной энергии, сравнимая с энергией массы покоя на горизонте, неизбежно преобразуется в тепловую энергию (оба вида энергии изменяются пропорционально $1/r$ внутри $r_s$: $kT \sim GMm_B/r$). Адиабатическое течение в предельном случае $\Gamma = 5/3$ приводит к *максимально* достижимой температуре газа на горизонте. При $\Gamma < 5/3$ тепловые энергии меньше.

---

*Вычислительное упражнение Ж.2.* Решите численно уравнения (Ж.21), (Ж.22) и (Ж.36) для аккреции нерелятивистских барионов при $T_\infty = 10^4$ K ($\Gamma = 5/3$). Определите безразмерные профили концентрации $n(r)/n_\infty$, скорости $u(r)/c$ и температуры $T(r)/T_\infty$ в виде функций от $r/M$. Изобразите ваши результаты графически (на бумаге с двойной логарифмической сеткой) в области значений $2M \leqslant r \leqslant 10r_a$, где $r_a \equiv GM/a_\infty^2$.

---

Устойчивость стационарной сферической аккреции на шварцшильдовскую черную дыру изучалась несколькими группами авторов. Наиболее общий анализ принадлежит Монкрайфу (см. [412] и приведенные там ссылки на более ранние работы). Монкрайф выполнил в рамках общей теории относительности анализ нормальных мод решения, соответствующего околозвуковому течению. Он нашел, что не существует неустойчивых мод ни в дозвуковой, ни в сверхзвуковой областях — течение устойчиво.