ГЛАВА I

Теория множеств

§ 1. МНОЖЕСТВА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Множеством называется совокупность некоторых объектов.
Примеры: Множество учащихся одного выпуска,
множество точек плоскости,
множество невырожденных поверхностей 2-го порядка в трехмерном пространстве,
множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел,
множество $\mathbb{Z}$ произвольных целых чисел,
множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел,
множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел,
множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Части множества

Запись $x \in E$ означает: «x является элементом множества E [1])». Если множество A состоит из элементов, принадлежащих некоторому другому множеству E, то оно называется *частью* или *подмножеством* этого множества. Множество эллипсоидов, например, является частью множества поверхностей второго порядка.

Частями множества E являются: оно само; его пустая часть, обозначаемая через $\emptyset$; часть, сводящаяся к одному элементу a, обозначаемая через $\{a\}$; часть, образованная тремя элементами a, b, c, обозначаемая через $\{a;\ b;\ c\}$. Не следует смешивать a как элемент E и $\{a\}$ как часть E, состоящую из одного элемента a. Для того чтобы обозначить множество элементов, обладающих некоторым свойством P, часто пользуются такой записью: $\{x;\ x$ обладает свойством $P\}$. Например, $\{x;\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$ означает множество вещественных чисел $\geqslant 0$, $\{\operatorname{arc\,tg} x;\ x \in \mathbb{R},\ e \leqslant x \leqslant 2e\}$ означает множество значений $\operatorname{arc\,tg} x$, когда x принимает все вещественные значения между e и $2e$ включительно.

Через $\mathfrak{P}(E)$ обозначают *множество всех частей множества* E. Это некоторое новое множество, которое можно образовать,

---

[1]) Множество иногда называется также пространством, а его элементы часто называются точками.

исходя из множества E. Можно затем рассмотреть $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ и т. д.

Если E содержит n элементов, то $\mathfrak{P}(E)$ содержит 2^n элементов[1]).

Отношение включения. Дополнение

Пусть X и Y — две части множества E. Говорят, что X *содержится в* Y, или что Y *содержит* X, если каждый элемент из X является элементом из Y; при этом пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$. Так, например, $\emptyset \subset X \subset E$, $\emptyset \subset \emptyset$, $E \subset E$. Если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$.

Множество элементов E, не принадлежащих некоторой его части A, называется дополнением к A в E и обозначается через $\complement_E A$ или просто $\complement A$, когда это не может привести к путанице. Очевидно, $\complement\complement A = A$, и если $A \subset B$, то $\complement A \supset \complement B$. Если A и B — две части множества E и $A \supset B$, то через $A - B$ обозначают иногда множество элементов из A, не принадлежащих B.

Объединение. Пересечение

Объединением некоторого множества частей из E называют часть E, состоящую из элементов, принадлежащих по крайней мере одной из этих частей. Объединение частей A, B, C записывается в виде $A \cup B \cup C$.

Объединение семейства частей A_i, занумерованных с помощью некоторого множества индексов I, обозначается через $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Пересечением множества частей E называется часть E, состоящая из элементов, принадлежащих одновременно всем этим частям. Для пересечения применяются аналогичные обозначения: $A \cap B \cap C$, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

---

[1]) Через C_n^p, или лучше $\binom{n}{p}$, обозначается число частей, содержащих по p элементов некоторого множества, состоящего из n элементов. Если теперь подсчитать все части E (не пропуская ни $\emptyset$, ни самого E), то получим:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Действительно, если $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\mathfrak{P}(E_n)$ для $n \geqslant 1$ можно считать состоящим из двух различных множеств: множества частей, содержащих элемент n, и множества частей, не содержащих его. Количество элементов в каждом из них такое же, как и в множестве $\mathfrak{P}(E_{n-1})$. Если $\mathfrak{P}(E_n)$ содержит A_n элементов, то $A_n = 2A_{n-1}$, и поскольку $A_0 = 1$ (E_0 — пустое множество, имеющее ровно одну часть $\emptyset$), то $A_n = 2^n$.

Две части называются непересекающимися, если их пересечение пусто.

Дополнение пересечения некоторого семейства частей совпадает с объединением их дополнений, и дополнение объединения семейства частей есть пересечение их дополнений:

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \quad \text{и} \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B. \quad (\mathrm{I}, 1; 1)$$

Преобразование, которое каждой части из E ставит в соответствие ее дополнение, является, следовательно, соответствием, переводящим $\subset$ в $\supset$, $\supset$ в $\subset$, $\cup$ в $\cap$, $\cap$ в $\cup$.

Произведение множеств

Произведением $E \times F$ *двух множеств* E *и* F называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), образованных из элементов x множества E и элементов y множества F. При этом пары (x, y) и (y, x) с $x \neq y$ считаются различными. Это особенно важно иметь в виду, когда множества E и F совпадают.

Точно так же можно определить произведение нескольких множеств или произвольного семейства множеств. Множества $(E \times F) \times G$, $E \times (F \times G)$ и $E \times F \times G$ отождествляются, так что произведение ассоциативно.

Произведения $E \times E$, $E \times E \times E$ и т. д. обозначаются также через E^2, E^3 и т. д. Отсюда возникло обозначение $\mathbb{R}^n$ для произведения n множеств, идентичных множеству $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. Точка из $\mathbb{R}^n$ является, следовательно, упорядоченной системой произвольных n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ

Пусть заданы два множества E и F. *Отображением* E в F, или *функцией, определенной на* E *со значениями в* F, называется соответствие f, которое каждому элементу x из E относит некоторый элемент из F, обозначаемый через $f(x)$. Обозначение $E \xrightarrow{f} F$ будет означать, что f является отображением E в F. Множество E называется *исходным множеством*, а множество F *конечным множеством* отображения. Следует различать отображение f и элемент $f(x)$, соответствующий x при этом отображении. Однако по чисто практическим соображениям при изложении это различие иногда не принимается во внимание. Так, например, неправильно (но удобно) говорить «функция $\sin x$», хотя следовало бы читать «функция $\sin$», поскольку $\sin x$ является значением этой функции в точке x. Эту неточность обычно исправляют, говоря, что «задана