Две части называются непересекающимися, если их пересечение пусто.

Дополнение пересечения некоторого семейства частей совпадает с объединением их дополнений, и дополнение объединения семейства частей есть пересечение их дополнений:

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \quad \text{и} \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B. \quad (\mathrm{I}, 1; 1)$$

Преобразование, которое каждой части из E ставит в соответствие ее дополнение, является, следовательно, соответствием, переводящим $\subset$ в $\supset$, $\supset$ в $\subset$, $\cup$ в $\cap$, $\cap$ в $\cup$.

Произведение множеств

Произведением $E \times F$ *двух множеств* E *и* F называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), образованных из элементов x множества E и элементов y множества F. При этом пары (x, y) и (y, x) с $x \neq y$ считаются различными. Это особенно важно иметь в виду, когда множества E и F совпадают.

Точно так же можно определить произведение нескольких множеств или произвольного семейства множеств. Множества $(E \times F) \times G$, $E \times (F \times G)$ и $E \times F \times G$ отождествляются, так что произведение ассоциативно.

Произведения $E \times E$, $E \times E \times E$ и т. д. обозначаются также через E^2, E^3 и т. д. Отсюда возникло обозначение $\mathbb{R}^n$ для произведения n множеств, идентичных множеству $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. Точка из $\mathbb{R}^n$ является, следовательно, упорядоченной системой произвольных n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ

Пусть заданы два множества E и F. *Отображением* E *в* F, или *функцией, определенной на* E *со значениями в* F, называется соответствие f, которое каждому элементу x из E относит некоторый элемент из F, обозначаемый через $f(x)$. Обозначение $E \xrightarrow{f} F$ будет означать, что f является отображением E в F. Множество E называется *исходным множеством*, а множество F *конечным множеством* отображения. Следует различать отображение f и элемент $f(x)$, соответствующий x при этом отображении. Однако по чисто практическим соображениям при изложении это различие иногда не принимается во внимание. Так, например, неправильно (но удобно) говорить «функция $\sin x$», хотя следовало бы читать «функция sin», поскольку $\sin x$ является значением этой функции в точке x. Эту неточность обычно исправляют, говоря, что «задана функция $x \to \sin x$», или «функция f, определенная равенством $f(x) = \sin x$».

Отображение множества в себя называют также оператором.

Примеры отображений

1°) Функция f, определенная формулой $f(x) = 1/x$, является отображением множества отличных от нуля элементов вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Будет неточным говорить, что это — функция вещественной переменной, поскольку здесь переменная не может принимать все вещественные значения. Однако вполне возможно рассматривать отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, определенное соотношениями $g(x) = 1/x$ для $x \neq 0$ и $g(0) = 2$. Эта функция g отлична от функции f, так как имеет иную область определения. Можно также рассматривать отображение h, определенное как $h(x) = 1/x$ для $x \neq 0$ и $h(0) = +\infty$, множества $E = \mathbb{R}$ в множество F, образованное из $\mathbb{R}$ и некоторого дополнительного элемента, обозначаемого $+\infty$.

2°) Если E — множество вещественных функций $\varphi(x)$, определенных и интегрируемых на вещественном интервале $[a, b]$, то интеграл $\varphi \to \int_a^b \varphi(x)\,dx$ является отображением E на вещественную прямую $\mathbb{R}$.

3°) Если E является множеством кривых конечной длины на евклидовой плоскости, то можно определить отображение E на полупрямую $\mathbb{R}_+$ (множество элементов $\geqslant 0$ из $\mathbb{R}$), которое каждой кривой ставит в соответствие ее длину.

Отображение f множества E в E, определенное равенством $f(x) = x$, называется *тождественным.*

Если E составляет часть F, то отображение E в F, определенное равенством $f(x) = x$, называется *канонической инъекцией* E в F.

Если $E \times F$ — произведение двух множеств, то отображение $E \times F$ в E, ставящее в соответствие каждой паре $(x, y) \in E \times F$ элемент $x \in E$, называется *проекцией на* E. Точно так же определяется *проекция на* F.

Пусть E, F, G — три множества. Отображение f множества $E \times F$ в множество G каждой паре $(x, y) = z \in E \times F$ ставит в соответствие некоторый элемент из G, обозначаемый через $f(z) = f((x, y))$. Обычно двойную скобку заменяют на простую $f(x, y)$ и говорят, что f является функцией двух переменных. Например, если E является множеством вещественных функций вещественной переменной, интегрируемых на каждом конечном интервале, то интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ определяет некоторое отображение $E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, поскольку это отображение является функцией трех переменных: $\varphi \in E$, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь отображение E в $F \times G$. Оно имеет вид $x \to (f(x), g(x))$, где f (соответственно g) является отображением E в F (соответственно в G). Задание такого отображения эквивалентно заданию системы двух функций. В общем случае задание отображения некоторого произведения $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ в произведение $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ равносильно заданию системы m функций от n переменных.

Отображение f множества E в множество F называется *постоянным*, если $f(x)$ для всех $x \in E$ является одним и тем же элементом из F.

Инъекции, сюръекции, биекции

Говорят, что отображение f множества E в множество F *инъективно*, или является *инъекцией*, если два различных элемента из E имеют образами при отображении f два различных элемента F. Каноническая инъекция некоторого подмножества в само множество является инъективным отображением.

Отображение f называют *сюръективным*, или *сюръекцией*, если каждый элемент из F является образом при отображении f по крайней мере одного элемента из E.

Отображение f называют *биективным*, или *биекцией*, если каждый элемент F является образом при отображении f некоторого, и притом единственного, элемента из E. Отображение биективно тогда и только тогда, когда оно одновременно инъективно и сюръективно. Биекция множества на себя называется также *перестановкой*, или *преобразованием*.

Пусть f — некоторая биекция, и пусть $y \in F$. Обозначим через $f^{-1}(y)$ единственный элемент x из E, такой, что $f(x) = y$. Тем самым мы определили некоторое отображение f^{-1} множества F в E. Это — снова биекция. Ее называют обратным отображением, или обратной биекцией к f. Часто ее также называют просто обратной функцией.

Образ и прообраз подмножества

Пусть f — отображение E в F и A — подмножество E. Обозначим через $f(A)$ подмножество F, образованное из всех элементов $f(x)$, $x \in A$. Очевидно, $f(\emptyset) = \emptyset$. Исходя из отображения f, мы тем самым определим некоторое отображение $A \to f(A)$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в множество $\mathfrak{P}(F)$. Это отображение сохраняет символы $\subset$, $\supset$, $\cup$ в том смысле, что

$$\begin{gathered} \text{если} \quad A \subset B, \quad \text{то} \quad f(A) \subset f(B), \\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \end{gathered} \qquad (\mathrm{I}, 2;\ 1)$$

Однако символы $\cap$, $\subset$ при этом отображении не сохраняются, так как имеет место лишь включение

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)\ ^{1)}. \tag{I, 2; 2}$$

Часть $f(A)$ называется образом части A при отображении f.

Пусть теперь B является некоторой частью множества F. Будем обозначать через $f^{-1}(B)$ часть E, образованную из всех таких элементов x, что $f(x) \in B$[2]. Очевидно, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$[3]. Мы связали с отображением f отображение $B \to f^{-1}(B)$ множества $\mathfrak{P}(F)$ в множество $\mathfrak{P}(E)$.

Это отображение сохраняет 5 символов $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$, $\complement$ в том смысле, что:

$$\text{если}\quad A \subset B, \quad \text{то}\quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \tag{I, 2; 3}$$

$$f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A).$$

Мы видим, следовательно, что так определенное отображение f^{-1} проще описанного выше отображения f. Часть $f^{-1}(B)$ называется прообразом множества B при отображении f. Уместно заметить, что это определение вовсе не предполагает биективности f. Во всяком случае, если $y \in F$, то можно говорить о $f^{-1}(\{y\})$, но это — некоторая часть E, а на элемент E. Эта часть может содержать более одного элемента, если f не является инъективным, и может оказаться пустой, если f не сюръективно[4]. Если f биективно, то $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Символ $f^{-1}(B)$, кроме того, может иметь два возможных одинаковых значения: это прообраз B при отображении f или образ множества B при биективном обратном отображении f^{-1}. Естественно, если отображение f биективно, то образ также сохраняет все 5 символов: $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$, $\complement$. Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} &f^{-1}(f(A)) \supset A \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{P}(E), \\ &f(f^{-1}(B)) \subset B \quad \text{для} \quad B \in \mathfrak{P}(F). \end{aligned} \tag{I, 2; 3$_2$}$$

---

[1]) Пусть f — постоянное отображение, т. е. $f(x) = b$ при любом $x \in E$. Пусть A и B — непересекающиеся части E. Так как $A \cap B = \emptyset$ то $f(A \cap B) =$ что не совпадает с множеством $f(A) \cap f(B) = \{b\}$.

[2]) Согласно кратким обозначениям, введенным на стр. 9,

$$f^{-1}(B) = \{x;\ f(x) \in B\}, \qquad f(A) = \{f(x);\ x \in A\}.$$

[3]) Может оказаться, что $f^{-1}(B) = \emptyset$ при $B \neq \emptyset$. Если, например, f является отображением $x \to x^2$ множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, то $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

[4]) См. примечание 3.

Множество отображений. Семейства. Последовательности

Если E и F — два множества, то можно говорить о некотором новом множестве — множестве отображений E в F. Если E имеет только 2 элемента a_1 и a_2, то множество отображений E в F может быть биективно отображенo на квадрат F^2, ибо каждое отображение E в F полностью определяется парой $(x, y) \in F^2$ образов x, y элементов a_1, a_2 из E. Если E состоит из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то множество отображений E в F можно биективно отобразить на F^n, ибо каждое такое отображение эквивалентно заданию системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ образов элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при этом отображении. Поэтому *множество отображений E в F принято обозначать через* F^E.

Естественно в дальнейшем рассматривать различные подмножества множества F^E: множество *непрерывных отображений* E в F, если E и F — метрические пространства; множество *линейных отображений* E в F, если E и F — векторные пространства и т. д. *Семейство* $(x_i)_{i \in I}$ *элементов из E, снабженных индексами из множества I*, можно рассматривать как отображение I в E. Множество семейств элементов из E, снабженных индексами из I, является не чем иным, как множеством E^I отображений I в E.

В частности, *последовательность элементов из E* можно определить как семейство элементов из E, снабженных индексами из множества $\mathbb{N}$ целых чисел $\geqslant 0$, или же как отображение $\mathbb{N}$ в E. Множество всех последовательностей элементов из E является множеством $E^{\mathbb{N}}$. Можно также говорить о последовательностях с индексами из множества $\mathbb{N}_1$ целых чисел $\geqslant 1$, или о *конечной последовательности*, снабженной индексами из конечного множества целых чисел $1, 2, \ldots, n$. Всегда будет важным уточнять смысл слова «последовательность», когда множество индексов не совпадает с $\mathbb{N}$.

Композиция отображений

Пусть E, F, G — три множества, и пусть f — некоторое отображение E в F, а g — отображение F в G. Композицией $g \circ f$ называется отображение E в F, определенное формулой $g \circ f(x) = g(f(x))$. Заметим, что запись $g \circ f$ производится в порядке, обратном тому, в котором производятся операции:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G. \qquad (\mathrm{I}, 2; 4)$$

Таким образом, в математике принято правило, согласно которому в композиции операций $g \circ f$ надо начинать с операции f, расположенной справа.

Если A — часть E, то $g \circ f(A) = g(f(A))$. Если B — часть G, то $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Композиция отображений ассоциативна, т. е. если f, g, h — отображения E в F, F в G и G в H соответственно, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, что проще записывается в виде $h \circ g \circ f$.

Если f^{-1} является биекцией, обратной к биекции f множества E на F, то $f^{-1} \circ f = I_E$, где I_E — тождественное отображение E, и $f \circ f^{-1} = I_F$, где I_F — тождественное отображение множества F. Обратно, *если отображение f множества E в F и отображение g множества F в E таковы, что $g \circ f = I_E$ и $f \circ g = I_F$, то f является биекцией, а g — его обратной биекцией.*

Если f — биекция E на F, а g — биекция F на G, то $g \circ f$ является биекцией E на G, а ее обратной биекцией будет $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Пусть f — отображение E в F и A — некоторая часть E. Отображение f_A множества A в F, определяемое формулой $f_A(x) = f(x)$ для $x \in A$, называется *сужением* f на A и часто обозначается через $f|A$. Говорят также, что f является *продолжением* на E отображения f_A множества A в множество F. Чаще всего в этом случае продолжают писать f вместо f_A.

Точно так же, если f — некоторое отображение E в F и если $f(E) \subset B$, то f определяет некоторое отображение f_B множества E в множество B, задаваемое формулой $f_B(x) = f(x)$. Практически вместо f_B всегда пишут f.

Замена переменных и замена функций

Пусть f — функция, определенная на E, со значениями в F. Если u является отображением некоторого множества E_1 в множество E, то можно построить новую функцию $f_1 = f \circ u$, определенную на E_1, со значениями в F. Говорят, что тем самым совершена *замена переменной u* или замена исходного множества $E_1 \xrightarrow{u} E$ и что f_1 является *прообразом f при этой замене переменных.* Производя в выражении $f(x)$ подстановку $x = u(x_1)$, получают выражение $f_1(x_1)$. Часто, если не указывается сама замена переменной u, функция f_1 обозначается через u^*f или даже через f^*. Таким образом,

$$u^*f(x_1) = f(u(x_1)) \quad \text{или} \quad f^*(x_1) = f(u(x_1)). \qquad (\text{I}, 2; 5)$$

При беглом изложении, допуская вольность речи, иногда отождествляют f_1 и f, говоря, что это та же самая функция (sic!), представимая через переменную x_1 вместо переменной x, но такое упрощение изложения опасно, так как может привести к серьезным противоречиям.

Если теперь v является некоторым отображением F в множество F_2, то можно определить новую функцию $f_2 = v \circ f$, определенную на E, со значениями в F_2. Говорят, что произведена замена v функции или замена множества значений F: $F \xrightarrow{v} F_2$ и что f_2 является *образом* f при этой замене.

Можно произвести одновременно и замену функции, рассматривая $f_3 = v \circ f \circ u$. Здесь f_3 является образом f при замене переменной u и замене функции v.

§ 3. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ФАКТОРМНОЖЕСТВО

Говорят, что на множестве E определено некоторое бинарное отношение, если задано множество всех пар (x, y) элементов из E, удовлетворяющих этому отношению. Так, например, отношения $x = y$, $x \leqslant y$, $x > y$, $x^2 = y^3$, $(x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 0)$ являются бинарными отношениями между вещественными числами. Очевидно, *бинарное отношение на E есть не что иное, как подмножество R произведения $E \times E$.*

В этом и следующем параграфах мы будем изучать бинарные отношения, имеющие особые значения.

Бинарное отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

a) *рефлективность*: $(x, x) \in R$ при любом $x \in E$,

b) *симметричность*: из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$, (I, 3; 1)

c) *транзитивность*: если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$.

Вместо того чтобы писать $(x, y) \in R$ часто пишут $x \underset{R}{\sim} y$ или $x \equiv y \pmod{R}$ (читается: «x конгруэнтно y по модулю R») или, проще, $x \sim y$ и $x \equiv y$, если нет необходимости каждый раз указывать, что речь идет об одном и том же отношении R.

Примеры. Отношения, приведенные в начале параграфа, кроме первого, отношениями эквивалентности не являются. Легко доказать, что все перечисленные ниже бинарные отношения являются отношениями эквивалентности.

1°) Будем исходить из множества $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака. В качестве множества E возьмем подмножество множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ пар (p, q), у которых $q \neq 0$.

Отношение эквивалентности определим формулой

$$(p, q) \equiv (p', q'), \quad \text{если} \quad pq' - p'q = 0. \qquad \text{(I, 3; 2)}$$

2°) Возьмем в качестве E множество вещественных неотрицательных функций вещественной переменной, т. е. множество отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+ = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$. Отношение эквивалентности выберем таким, в котором $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда f и g «эквивалентны» при $x \to +\infty$, т. е. если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует x_0, такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеют место неравенства $f(x)(1 - \varepsilon) \leqslant g(x) \leqslant f(x)(1 + \varepsilon)$.

3°) Определим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ отношение эквивалентности так, чтобы $p \equiv q$ тогда и только тогда, когда