дена замена v функции или замена множества значений F: $F \xrightarrow{v} F_2$ и что f_2 является *образом* f при этой замене.

Можно произвести одновременно и замену функции, рассматривая $f_3 = v \circ f \circ u$. Здесь f_3 является образом f при замене переменной u и замене функции v.

§ 3. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ФАКТОРМНОЖЕСТВО

Говорят, что на множестве E определено некоторое бинарное отношение, если задано множество всех пар (x, y) элементов из E, удовлетворяющих этому отношению. Так, например, отношения $x = y$, $x \leqslant y$, $x > y$, $x^2 = y^3$, $(x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 0)$ являются бинарными отношениями между вещественными числами. Очевидно, *бинарное отношение на E есть не что иное, как подмножество R произведения $E \times E$.*

В этом и следующем параграфах мы будем изучать бинарные отношения, имеющие особые значения.

Бинарное отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

a) *рефлективность*: $(x, x) \in R$ при любом $x \in E$,

b) *симметричность*: из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$, (I, 3; 1)

c) *транзитивность*: если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$.

Вместо того чтобы писать $(x, y) \in R$ часто пишут $x \underset{R}{\sim} y$ или $x \equiv y (\mathrm{mod}\, R)$ (читается: «x конгруэнтно y по модулю R») или, проще, $x \sim y$ и $x \equiv y$, если нет необходимости каждый раз указывать, что речь идет об одном и том же отношении R.

Примеры. Отношения, приведенные в начале параграфа, кроме первого, отношениями эквивалентности не являются. Легко доказать, что все перечисленные ниже бинарные отношения являются отношениями эквивалентности.

1°) Будем исходить из множества $\mathbb{Z}$ целых чисел произвольного знака. В качестве множества E возьмем подмножество множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ пар (p, q), у которых $q \neq 0$.

Отношение эквивалентности определим формулой

$$(p, q) \equiv (p', q'), \quad \text{если} \quad pq' - p'q = 0. \qquad \text{(I, 3; 2)}$$

2°) Возьмем в качестве E множество вещественных неотрицательных функций вещественной переменной, т. е. множество отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+ = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$. Отношение эквивалентности выберем таким, в котором $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда f и g «эквивалентны» при $x \to +\infty$, т. е. если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует x_0, такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеют место неравенства $f(x)(1 - \varepsilon) \leqslant g(x) \leqslant f(x)(1 + \varepsilon)$.

3°) Определим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ отношение эквивалентности так, чтобы $p \equiv q$ тогда и только тогда, когда

$p - q$ делится на заранее заданное число m. В теории чисел такое отношение записывается в виде $p \equiv q (\operatorname{mod} m)$.

4°) Пусть E — множество прямых на плоскости. Определим отношение эквивалентности для прямых D и D', считая $D \equiv D'$, когда эти прямые параллельны или совпадают.

5°) Пусть E — множество всех *векторов* $\overrightarrow{AB}$ на плоскости. Определим в E отношение эквивалентности $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

6°) В том же самом множестве E установим отношение эквивалентности, согласно которому $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ лежат на одной прямой, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Классы эквивалентности. Разбиения

Пусть для элементов множества E определено некоторое отношение эквивалентности R. Часть E, образованную из всех эквивалентных между собой элементов, будем называть *классом эквивалентности.*

Теорема. *Два класса эквивалентности всегда либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Пусть A и B — два класса эквивалентности. Предположим, что они пересекаются, и x — некоторая точка пересечения. Класс A образован из элементов, эквивалентных одному из своих элементов a, но, так как x и a эквивалентны, то из свойства c) следует, что A образован также из элементов, эквивалентных x. Однако тогда по той же причине B обладает тем же свойством, и, значит, A и B совпадают.

Из проведенного доказательства, кроме того, вытекает, что класс эквивалентности является множеством всех элементов, эквивалентных произвольному элементу из этого класса. Таким образом, классы эквивалентности определяют некоторое *разбиение* множества E, т. е. *некоторое множество непустых попарно не пересекающихся частей E*, объединение которых равно E. Если известны эти части, то известно и отношение эквивалентности, ибо x и y эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу эквивалентности. Обратно, всякое разбиение множества E: $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, где A_i не пусты и попарно не пересекаются, определяет некоторое отношение эквивалентности, а именно: $x \equiv y$, если существует такой индекс $i \in I$, что $x \in A_i$, $y \in A_i$. В этом случае множества A_i являются классами эквивалентности в этом соотношении. В частности, если f — некоторая *сюръекция* множества E на множество F, то отношение $f(x) = f(y)$ является отношением эквивалентности на E и множества $f^{-1}(\{z\})$, $z \in F$, являются классами эквивалентности.

Фактормножество

Фактормножеством множества E по отношению эквивалентности R называется множество, обозначаемое через E/R, каждый элемент которого является одним из классов эквивалентности. Если через $\dot{x}$ обозначить класс эквивалентности элемента x, то $\dot{x}$ является элементом фактормножества и $x \in \dot{x}$.

Отображение, ставящее в соответствие каждому элементу x из E класс эквивалентности $\dot{x}$, называется *канонической сюръекцией* E на E/R. Действительно, отображение сюръективно. Обратно, мы видели выше, что всякая сюръекция f множества E на F определяет некоторое отношение эквивалентности R. Отображение, ставящее в соответствие каждому $z \in F$ класс эквивалентности $f^{-1}(\{z\})$, является биекцией множества F на E/R, что позволяет рассматривать F как некоторую «модель» фактормножества E/R.

Можно дать простую интерпретацию фактормножества на примерах отношений эквивалентности, приведенных ранее на стр. 17—18.

В первом примере фактормножество является множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, поскольку рациональное число обычно определяется как семейство пар (p, q), $q \neq 0$, где при $pq' - p'q = 0$ две пары (p, q) и (p', q') определяют одно и то же рациональное число.

В третьем примере фактормножествами являются множества целых чисел, сравнимых по модулю m.

В четвертом — фактормножество есть множество направлений прямых на плоскости.

В пятом — фактормножеством является множество свободных векторов на плоскости. При этом свободным вектором называется как раз класс всех эквивалентных векторов.

В шестом примере фактормножеством является множество «скользящих векторов» плоскости, применяемых в механике.

Факторгруппа по инвариантной подгруппе

Пусть G — некоторая группа, закон композиции которой записываем мультипликативно: $(x, y) \to xy$. Заданная композиция является отображением $G \times G$ в G.

Пусть Γ — некоторая инвариантная подгруппа[1]). Будем рассматривать следующее бинарное отношение: «$x \equiv y$, если существует элемент $a \in \Gamma$, такой, что $y = ax$, или, что то же самое, если $yx^{-1} \in \Gamma$». Можно проверить, что такое отношение есть отношение эквивалентности. Классами эквивалентности являются «правые классы смежности» в G по подгруппе Γ. Поскольку Γ инвариантна, то отношение эквивалентности «$x \equiv y$, если существует элемент $a \in \Gamma$, такой, что $y = xa$, или если $x^{-1}y \in \Gamma$», идентично предыдущему и правые классы смежности являются также левыми классами смежности. Пусть α, β — два из этих классов. Какими бы ни были $x \in \alpha$, $y \in \beta$, произведение xy всегда принадлежит одному и тому же классу. Будем обозначать его через $\alpha\beta$. Закон композиции $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$ превращает фактормножество в новую группу, обозначаемую через G/Γ и называемую факторгруппой группы G по инвариантной подгруппе Γ.

Факторпространство векторного пространства по векторному подпространству

Пусть E — векторное пространство над полем K, и пусть F — некоторое векторное подпространство. Рассмотрим бинарное отношение на E «разность $x - y$ принадлежит F». Это — некоторое отношение эквивалентности. Впрочем, относительно сложения E является абелевой группой, а F — ее подгруппой. В абелевой группе всякая подгруппа инвариантна. Следовательно, рассматриваемое отношение является частным случаем предыдущего. Пусть E/F — факторгруппа. Эта факторгруппа абелева, и закон композиций в ней мы записываем аддитивно. Пусть $\lambda \in K$ — некоторый скаляр и α — некоторый класс эквивалентности. Если x — произвольный элемент из α $(\dot{x} = \alpha)$, то λx всегда принадлежит одному и тому же классу эквивалентности, обозначаемому через $\lambda\alpha$. Закон сложения на E/F и закон умножения на скаляры $(\lambda, \alpha) \to \lambda\alpha$ превращают E/F в векторное пространство, называемое факторпространством векторного пространства E по векторному подпространству F. Согласно определению векторных операций в E/F, для $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in K$ имеем $\dot{(x+y)} = \dot{x} + \dot{y}$, $\dot{(\lambda x)} = \lambda\,\dot{x}$. Другими словами, каноническая сюръекция $x \to \dot{x}$ пространства E на E/F является линейным отображением.

Каноническая сюръекция не биективна (кроме случая, когда $F = \{0\}$). Однако, если G является векторным подпростран-

[1]) Подгруппа Γ называется инвариантной, если из $a \in G$, $x \in \Gamma$ следует, что $axa^{-1} \in \Gamma$.

ством E, дополнительным[1]) к F, то сужение на G канонического отображения является биекцией G на E/F. В самом деле:

a) Это сужение инъективно, ибо если x и y — два элемента G, таких, что $\dot{x}=\dot{y}$, то $x-y\in E$. Так как G — векторное подпространство, то $x-y\in G$. Поскольку F и G дополнительны друг другу, то их пересечение сводится к нулевому элементу, а, значит, $x=y$.

b) Рассматриваемое сужение сюръективно, ибо если α является некоторым классом эквивалентности и если x есть некоторый элемент этого класса, то x записывается в виде $x = x'+x''$, $x'\in F$, $x''\in G$ (значит, $x-x'\in G$), а, следовательно, $\dot{x}''=\dot{x}=\alpha$, где $x''\in G$, что доказывает сюръективность рассматриваемого отображения.

Итак, отображение $x\to\dot{x}$ подпространства G на E/F является линейной биекцией, т. е. биекцией, сохраняющей векторную структуру. Оно позволяет считать G моделью векторного факторпространства E/F. *В частности, G имеет ту же размерность, что и E/F*[2]).

§ 4. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Бинарное отношение R на множестве E называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

a) *рефлективность*: $(x, x)\in R$;

b) *транзитивность*: если $(x, y)\in R$ и $(y, z)\in R$, то $(x, z)\in R$; (I, 4; 1)

c) *антисимметричность*: если $(x, y)\in R$ и $(y, x)\in R$, то $x=y$.

Вместо того чтобы писать $(x, y)\in R$, пишут также $x\leqslant_R y$, или $x\leqslant y$, если отношение порядка было указано заранее и нет необходимости его повторять.

В этом случае $y\geqslant x$ означает $x\leqslant y$. Отношения (I, 4; 1) теперь можно записать в виде:

a) $x\leqslant x$;

b) если $x\leqslant y$ и $y\leqslant z$, то $x\leqslant z$;

c) если $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$, то $x=y$.

---

[1]) Каждый элемент E представляется единственным образом как сумма некоторого элемента из F и некоторого элемента из G.

[2]) Факторпространство E/F существует всегда, поскольку мы его явно определили. Однако всегда ли существует дополнение G к F в E? Существование такого дополнения очевидно, если E конечномерно. То же справедливо и во всех других случаях. Этот факт мы примем без доказательства.