ством E, дополнительным[1]) к F, то сужение на G канонического отображения является биекцией G на E/F. В самом деле:

a) Это сужение инъективно, ибо если x и y — два элемента G, таких, что $\dot{x} = \dot{y}$, то $x - y \in E$. Так как G — векторное подпространство, то $x - y \in G$. Поскольку F и G дополнительны друг другу, то их пересечение сводится к нулевому элементу, а, значит, $x = y$.

b) Рассматриваемое сужение сюръективно, ибо если α является некоторым классом эквивалентности и если x есть некоторый элемент этого класса, то x записывается в виде $x = x' + x''$, $x' \in F$, $x'' \in G$ (значит, $x - x' \in G$), а, следовательно, $\dot{x}'' = \dot{x} = \alpha$, где $x'' \in G$, что доказывает сюръективность рассматриваемого отображения.

Итак, отображение $x \to \dot{x}$ подпространства G на E/F является линейной биекцией, т. е. биекцией, сохраняющей векторную структуру. Оно позволяет считать G моделью векторного факторпространства E/F. *В частности, G имеет ту же размерность, что и E/F*[2]).

§ 4. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Бинарное отношение R на множестве E называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

a) *рефлективность*: $(x, x) \in R$;

b) *транзитивность*: если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$; (I, 4; 1)

c) *антисимметричность*: если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$.

Вместо того чтобы писать $(x, y) \in R$, пишут также $x \leqslant_R y$, или $x \leqslant y$, если отношение порядка было указано заранее и нет необходимости его повторять.

В этом случае $y \geqslant x$ означает $x \leqslant y$. Отношения (I, 4; 1) теперь можно записать в виде:

a) $x \leqslant x$;

b) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

c) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

---

[1]) Каждый элемент E представляется единственным образом как сумма некоторого элемента из F и некоторого элемента из G.

[2]) Факторпространство E/F существует всегда, поскольку мы его явно определили. Однако всегда ли существует дополнение G к F в E? Существование такого дополнения очевидно, если E конечномерно. То же справедливо и во всех других случаях. Этот факт мы примем без доказательства.

Примеры отношений порядка

1°) В множестве $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел, в множестве $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и в множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел отношение «$(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$» является отношением порядка.

Уместно заметить, что отношение «$(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant y$» является также отношением порядка, называемым противоположным предыдущему.

Символ $\preccurlyeq$ был использован по аналогии с символом $\leqslant$. По этой же аналогии можно рассматривать отношения:

$$x \preccurlyeq y, \quad x \prec y, \quad y \succcurlyeq x \quad \text{и} \quad y \succ x,$$

читаемые соответственно как «x предшествует y», «x строго предшествует y», «y следует за x», «y строго следует за x», а символ $x \prec y$ означает «$x \preccurlyeq y$ и $x \neq y$».

Заметим, что мы порываем здесь с принятыми определениями, говоря «x предшествует y» вместо обычного «предшествует или совпадает» и «строго предшествует» вместо «предшествует». Причина этого изменения, полностью оправдываемая в дальнейшем, заключается в том, что чаще всего используется отношение $\preccurlyeq$ и его следует называть короче. Следует всякий раз, когда это возможно, вместо символа $\prec$ применять символ $\preccurlyeq$. Когда пишется строгое неравенство с $\prec$, то это должно являться предупреждением для читателя в том, что здесь требуется осторожность, что неравенство $\preccurlyeq$ не подходит. Например, непрерывность вещественной функции f вещественной переменной в точке a следует записывать следующим образом:

«каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\eta > 0$, такое, что из $|x - a| \leqslant \eta$ следует $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$».

Мы употребили знак более широкого неравенства там, где это было возможным, и применили строгое неравенство > 0 только там, где это было абсолютно необходимо.

Использованная аналогия между произвольным отношением порядка $\preccurlyeq$ и его частным случаем $\leqslant$ в множестве вещественных чисел может создать некоторые затруднения, поскольку можно писать $x \preccurlyeq y$ и говорить «x предшествует y» даже в том случае, когда отношение порядка определено неравенством $x \geqslant y$.

2°) В множестве слов существует отношение порядка, называемое алфавитным (если договориться отождествлять омонимы).

3°) В множестве $E = \mathfrak{P}(F)$ частей множества F существует естественное отношение порядка: $X \preccurlyeq Y$, если $X \subset Y$.

4°) В множестве $E = \mathbb{R}^F$ функций, определенных на множестве F, с вещественными значениями также существует естественное отношение порядка: $f \leqslant g$, если при любом $x \in F$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$. Заметим, что здесь отношение $f < g$ означает, что, каково бы ни было x, $f(x) \leqslant g(x)$ и что, по меньшей мере для одного x, $f(x) < g(x)$. Рассматриваемое отношение вовсе не означает, что при любом x имеет место неравенство $f(x) < g(x)$.

5°) В множестве $\mathbb{N}_1$ целых чисел $\geqslant 1$ существует отношение порядка, применяемое в арифметике: $a \leqslant b$, если a является делителем b.

6°) В произвольном множестве E отношение «$x \leqslant y$, если $x = y$» является отношением порядка. Говорят, что это — хаотический порядок на E.

Говорят, что отношение порядка является полным или что множество E *вполне упорядочено*, если для любых двух элементов x, y из E необходимо имеем: или $x < y$, или $x = y$, или $x > y$.

Это справедливо для естественных порядков в множествах $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ в алфавитном порядке слов, но это не так для отношений порядка, рассмотренных в примерах 3°)—5°).

В каждом из таких случаев, если x и y не удовлетворяют никакому из трех указанных соотношений, говорят, что они *не сравнимы*. В примере 3°) две непустые не пересекающиеся части F не сравнимы; в 4°) — не сравнимы функции 0 и x; в 5°) — не сравнимы целые числа 2 и 3; в хаотическом порядке примера 6°) два произвольных не совпадающих элемента не сравнимы.

Мажорируемые части, мажоранты, максимум, точная верхняя грань

Говорят, что некоторая часть упорядоченного множества E *мажорируема*, если существует по крайней мере один элемент из E, следующий за всеми элементами этой части. Каждый такой элемент называется *мажорантой* этой части.

Аналогичное определение дается для *минорируемой* части и *миноранты*.

Часть, одновременно мажорируемая и минорируемая, называется «ограниченной».

Говорят, что некоторая часть E имеет *максимум*, если существует мажоранта этой части, *ей принадлежащая*.

Часть не обязана иметь максимум, однако, *если она его имеет, то этот максимум единствен*. В самом деле, если a и b — два максимума одной и той же части, то одновременно имеем: $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, откуда $a = b$. Максимум некоторой части A, если он существует, обозначается через $\max\limits_{x \in A} x$ или $\max(A)$.

Аналогичное определение дается для *минимума*, обозначаемого через min.

Говорят, что некоторая часть A множества E имеет *точную верхнюю грань*, если множество ее мажорант имеет минимум, и этот минимум называется *точной верхней гранью рассматриваемой части*.

Точная верхняя грань является, следовательно, наименьшей из мажорант. Любой элемент, мажорирующий часть A, мажорирует также и ее точную верхнюю грань.

Часть не обязана всегда иметь точную верхнюю грань, но если она ее имеет, то эта грань единственна. Точная верхняя грань некоторой части A, если она существует, обозначается через $\sup\limits_{x \in A} x$ или $\sup A$.

Если точная верхняя грань принадлежит A, то она является максимумом, и обратно. Аналогичное определение дается для *точной нижней грани*, обозначаемой через inf.

Теорема 2. *Всякая непустая мажорируемая часть вещественной прямой* $\mathbb{R}$, *снабженной отношением естественного порядка, имеет точную верхнюю грань, и всякая непустая минорируемая ее часть*[1] *имеет точную нижнюю грань. Кроме того, точная верхняя грань b мажорируемой части A характеризуется соотношениями*

a) *при любом $x \in A$, $x \leqslant b$;*

b) *каково бы ни было $b_1 < b$, существует по крайней мере одно число $x \in A$, такое, что $b_1 \leqslant x \leqslant b$.*

Доказательство этой теоремы общеизвестно.

Естественно, что не мажорируемая часть не имеет точной верхней грани. Прямая $\mathbb{R}$ ни мажорируема, ни минорируема.

В множестве E частей множества F при отношении порядка $X \subset Y$ (пример 3°) каждая часть имеет точные верхнюю и нижнюю грани. В самом деле, любая часть из E является некоторым множеством частей F. Точной верхней гранью будет объединение этих частей, а точной нижней гранью — их пересечение.

В множестве E вещественнозначных функций, определенных на множестве F (пример 4°), всякая мажорируемая часть имеет точную верхнюю грань и всякая минорируемая часть имеет точ-

---

[1]) Условие «непустая» существенно. Часть $\varnothing$ мажорируема, так как любая точка $\mathbb{R}$ является мажорантой для $\varnothing$. Множество мажорант совпадает с $\mathbb{R}$, не имеющим минимума. Хотя $\varnothing$ и ограничена, она не имеет ни точной верхней, ни точной нижней граней.

ную нижнюю грань. Действительно, если A — эта часть, то ее точной верхней гранью будет функция f_0, задаваемая формулой:

$$f_0(x) = \sup_{f \in A} f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in F. \tag{I, 4; 2}$$

Заметим, что имеется два *совершенно разных*, но полезных понятия. С одной стороны, точная верхняя грань части A в упорядоченном множестве $\mathbb{R}^F$. Это вещественная функция, называемая *верхней огибающей* функций $f \in A$. С другой стороны, точная верхняя грань в $\mathbb{R}$ множества всех значений этих функций, $\sup\limits_{\substack{x \in F \\ f \in A}} f(x)$, которая является, если она существует, некоторым вещественным *числом* — точной верхней гранью функций $f \in A$. Если A состоит из одного элемента f, то говорят о точной верхней грани f, $\sup\limits_{x \in F} f(x)$, — вещественном числе, являющемся точной верхней гранью множества значений функции f. Если она достигается для некоторого значения x, то ее называют *максимумом.*

Аналогичное замечание можно сделать для *нижней огибающей* и *точной нижней грани.* Эти часто употребляемые понятия в силу своей близости таят в себе некоторую опасность.

В множестве $\mathbb{N}_1$ целых чисел $\geqslant 1$ с отношением делимости 5°) всякая конечная часть имеет точную верхнюю грань — общее наименьшее кратное и точную нижнюю грань — общий наибольший делитель чисел, входящих в эту часть.

Возрастающие функции

Пусть E и F — два упорядоченных множества. Отображение f множества E в F называется *возрастающим*, если

$$\text{из} \quad x \leqslant y \quad \text{следует} \quad f(x) \leqslant f(y). \tag{I, 4; 3}$$

Если, сверх того,

$$\text{из} \quad x < y \quad \text{следует} \quad f(x) < f(y), \tag{I, 4; 4}$$

то отображение называется *строго возрастающим.*

Соответствующим образом измененное определение дается для *убывающего* и *строго убывающего отображений.*

Если E *вполне* упорядочено, то всякая одновременно возрастающая и убывающая функция на E постоянна. В самом деле, пусть x и y — произвольные элементы E. Для них либо $x \leqslant y$, либо $x \geqslant y$. Так как f — одновременно возрастающая и убывающая функция, то $f(x) \leqslant f(y)$ и $f(x) \geqslant f(y)$; а, значит, $f(x) = f(y)$, т. е. f постоянна[1]).

Замкнутым интервалом $[a, b]$, $a \leqslant b$, упорядоченного множества E называется множество элементов x из E, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. *Открытым интервалом* $]a, b[$ называется множество элементов x, удовлетворяющих отношениям $a < x < b$. Через $[a, b[$ обозначается множество элементов x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, а через $]a, b]$ — множество элементов x, для которых $a < x \leqslant b$. Последние множества называются также *полуоткрытыми интервалами*. Во всех случаях a является началом, а b — концом интервала. Иногда нам придется рассматривать интервалы с началом a и концом b без уточнения того, являются ли они открытыми, полуоткрытыми или замкнутыми. Мы их будем обозначать через $|a, b|$.

Множество таких элементов x, что $a \leqslant x$, называется правым замкнутым сечением $[a, \rightarrow)$, а множество таких x, что $a < x$, называется правым открытым сечением $]a, \rightarrow)$.

Аналогичное определение дается для левых сечений $(\leftarrow, a]$ и $(\leftarrow, a[$.

В случае вещественной прямой $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением такие сечения называются полупрямыми. Эти сечения, так же как и все множество E в целом, принято считать интервалами.

Пополненная прямая

Пополненной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество, образованное, с одной стороны, из элементов вещественной прямой $\mathbb{R}$ и, с другой стороны, — из двух элементов, обозначаемых $-\infty$ и $+\infty$. На $\overline{\mathbb{R}}$ устанавливается отношение порядка, обозначаемое через $\leqslant$ и определяемое следующим образом: $a \leqslant b$, если a и b конечны и если они удовлетворяют неравенству $\leqslant$ в $\mathbb{R}$, или же если $a = -\infty$ или $b = +\infty$. Множество $\overline{\mathbb{R}}$ вполне упорядочено и имеет, кроме того, минимум $-\infty$ и максимум $+\infty$. Любая часть $\overline{\mathbb{R}}$ ограничена, и теорема 2 справедлива в $\overline{\mathbb{R}}$ без предположения мажорируемости части A, поскольку эта мажорируемость всегда имеет место[2]). Интервал из $\overline{\mathbb{R}}$ вида $[a, +\infty[$ при $a \in \mathbb{R}$ содержится в $\mathbb{R}$, поэтому его часто называют полупря-

---

[1]) Мы замечали, что отношение $x = y$ является таким отношением порядка в E, при котором два различных элемента не сравнимы. Если F — некоторое упорядоченное множество, то *любое* отображение E в F является одновременно возрастающим и убывающим, не являясь необходимо постоянным. Таким образом, предположение о полной упорядоченности E не излишне.

[2]) Точная верхняя грань пустой части $\emptyset$ есть минимум $\overline{\mathbb{R}}$ (см. примечание на стр. 24), т. е. $-\infty$, точной нижней границей является $+\infty$. Для непустой части A всегда $\sup(A) \geqslant \inf(A)$. Это оказывается неверным для пустого множества.

мой $[a, \rightarrow)$ в $\mathbb{R}$. Точно так же, если A — некоторая не мажорируемая часть $\mathbb{R}$, то часто пишут $\sup(A) = +\infty$, это приводит к тому, что A лучше рассматривать как некоторую часть $\overline{\mathbb{R}}$.

§ 5. МОЩНОСТИ. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Рассмотрим отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, ставящее в соответствие каждому целому числу удвоенное число. Это отображение взаимно однозначно и позволяет таким образом в некотором смысле считать, что существует столько же четных чисел, сколько существует целых. Отсюда следует также, что в случае бесконечных множеств может существовать биективное отображение некоторого множества на его часть, отличную от самого множества.

Может показаться слишком смелым, несмотря на сказанное выше, пытаться сравнивать между собой бесконечные множества. Тем не менее, благодаря понятию биективного отображения такое сравнение возможно.

Теорема 3 (Бернштейн). *Пусть E и F — два произвольных множества. Тогда*

1°) *либо существует инъекция E в F, либо существует инъекция F в E (оба обстоятельства не исключают друг друга)*;

2°) *если существуют одновременно инъекция E в F и инъекция F в E, то существует также биекция E на F.*

Мы примем эту теорему без доказательства.

Следствие. *Для заданных множеств E и F имеется только три возможности:*

a) *Существует инъекция E в F и не существует инъекции F в E. В этом случае говорят, что F имеет мощность, строго большую мощности E, или что E имеет мощность, строго меньшую F.*

b) *Существует инъекция F в E и не существует инъекции E в F. Тогда E имеет мощность, строго большую, чем F, или F по мощности строго меньше, чем E.*

c) *Существует биекция E на F. В этом случае говорят, что E и F имеют одинаковую мощность, или равномощны*[1]).

Мощности. Кардинальные числа

Отношение «E равномощно F» является отношением эквивалентности *между множествами*[2]). *Класс эквивалентности,*

[1]) Доказательство теоремы Бернштейна сложно, и мы его не приводим. Следствие вытекает непосредственно из этой теоремы. Если E равномощно с F или мощность его строго меньше, чем F, то говорят, что E имеет мощность, меньшую, чем мощность F.

[2]) Мы намеренно не останавливаемся на логических трудностях, связанных с понятием множества всех множеств.