мой $[a, \rightarrow)$ в $\mathbb{R}$. Точно так же, если A — некоторая не мажорируемая часть $\mathbb{R}$, то часто пишут $\sup(A) = +\infty$, это приводит к тому, что A лучше рассматривать как некоторую часть $\overline{\mathbb{R}}$.

§ 5. МОЩНОСТИ. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Рассмотрим отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, ставящее в соответствие каждому целому числу удвоенное число. Это отображение взаимно однозначно и позволяет таким образом в некотором смысле считать, что существует столько же четных чисел, сколько существует целых. Отсюда следует также, что в случае бесконечных множеств может существовать биективное отображение некоторого множества на его часть, отличную от самого множества.

Может показаться слишком смелым, несмотря на сказанное выше, пытаться сравнивать между собой бесконечные множества. Тем не менее, благодаря понятию биективного отображения такое сравнение возможно.

Теорема 3 (Бернштейн). *Пусть E и F — два произвольных множества. Тогда*

1°) *либо существует инъекция E в F, либо существует инъекция F в E (оба обстоятельства не исключают друг друга);*

2°) *если существуют одновременно инъекция E в F и инъекция F в E, то существует также биекция E на F.*

Мы примем эту теорему без доказательства.

Следствие. *Для заданных множеств E и F имеется только три возможности:*

a) *Существует инъекция E в F и не существует инъекции F в E. В этом случае говорят, что F имеет мощность, строго большую мощности E, или что E имеет мощность, строго меньшую F.*

b) *Существует инъекция F в E и не существует инъекции E в F. Тогда E имеет мощность, строго большую, чем F, или F по мощности строго меньше, чем E.*

c) *Существует биекция E на F. В этом случае говорят, что E и F имеют одинаковую мощность, или равномощны*[1]).

Мощности. Кардинальные числа

Отношение «E равномощно F» является отношением эквивалентности *между множествами*[2]). *Класс эквивалентности,*

---

[1]) Доказательство теоремы Бернштейна сложно, и мы его не приводим. Следствие вытекает непосредственно из этой теоремы. Если E равномощно с F или мощность его строго меньше, чем F, то говорят, что E имеет мощность, меньшую, чем мощность F.

[2]) Мы намеренно не останавливаемся на логических трудностях, связанных с понятием множества всех множеств.

т. е. класс всех множеств, равномощных данному множеству, называется *мощностью*, или *кардинальным числом*. Конечные кардинальные числа являются классами эквивалентности конечных множеств. Эти числа по определению являются целыми натуральными числами 0, 1, 2 ... . (Заметим, что мы приняли как первичное понятие целые натуральные числа, но их строгое математическое определение полно сложностей. В частности, не легко a priori определить *конечные множества*. Часто по определению считают множество конечным, если оно не равномощно никакой из его частей, отличных от самого множества, а затем доказывают, что кардинальные конечные числа обладают свойствами целых натуральных чисел.) Бесконечное кардинальное число, т. е. мощность бесконечного множества, называется *трансфинитным кардинальным числом, или трансфинитным числом*.

В классе кардинальных чисел существует отношение порядка: «если α является кардинальным числом некоторой части множества мощности β, то $\alpha \leqslant \beta$». Согласно теореме 3, это отношение обладает антисимметрией, а, значит, действительно является некоторым отношением порядка. Из этой же теоремы следует, что это отношение порядка является полным, т. е. любые два кардинальных числа сравнимы.

Заметим, что если существует сюръекция f множества E на множество F, то мощность F меньше мощности E. В самом деле, прообраз каждой точки F не пуст, и если в каждом из этих прообразов мы выберем по одному элементу, то получим некоторую часть E, равномощную F[1]). Например, фактормножество множества E по некоторому отношению эквивалентности всегда имеет меньшую мощность, чем E.

На множествах кардинальных чисел можно определить операции сложения, умножения, возведения в степень точно так же, как и в множестве натуральных чисел.

1°) Пусть α и β — два кардинальных числа, а E и F — множества мощности соответственно α и β. Через $\alpha+\beta$ обозначается мощность «суммы» E и F, т. е. всякого множества, допускающего *разбиение*, образованное из двух множеств, равномощных E и F соответственно.

2°) Через $\alpha\beta$ обозначается мощность произведения $E \times F$. Это — кардинальное число объединения α непересекающихся частей, каждая из которых имеет мощность β.

3°) Через α^β обозначается мощность множества E^F всех отображений F в E.

---

[1]) Нетрудно выбрать по одному элементу в каждом из конечного числа множеств. Производить подобный выбор в случае бесконечного числа множеств не легко. После больших споров в начале нашего века было признано, что возможность такого выбора может быть введена как *аксиома* теории множеств — *аксиома выбора*, или *аксиома Цермело*.

Теорема 4. *Предыдущие операции, определенные на множестве кардинальных чисел, обладают следующими свойствами:*
ассоциативность и коммутативность сложения,
ассоциативность и коммутативность умножения,
дистрибутивность умножения по отношению к сложению,
и, сверх того, имеют место соотношения

$$(\alpha^{\beta})(\alpha^{\gamma}) = \alpha^{\beta+\gamma}, \quad \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma}, \quad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}. \qquad (I, 5; 1)$$

Доказательство. Не очевидны лишь равенства (I, 5; 1). Пусть E, F, G — множества мощностей α, β, γ соответственно. Тогда мощности множеств E^F и E^G равны α^{β} и α^{γ}. Для того чтобы определить отображение множества $F+G$ в E, достаточно определить сужение этого отображения на F и на G, т. е. произвольное отображение F в E и произвольное отображение G в E. Общий элемент E^{F+G} получается, таким образом, как пара, состоящая из произвольного элемента E^F и произвольного элемента E^G. Каждая такая пара является произвольным элементом $E^F \times E^G$, а следовательно, E^{F+G} равномощно $E^F \times E^G$ и $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.

На стр. 13 мы видели, что всякое отображение G в $E \times F$, т. е. любой элемент $(E \times F)^G$, является парой, состоящей из некоторого отображения G в E и некоторого отображения G в F, т. е. элемента E^G и элемента F^G. Такая пара является произвольным элементом $E^G \times F^G$, а, следовательно, $(E \times F)^G$ равномощно множеству $E^G \times F^G$ и $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$.

Пусть теперь f — некоторое отображение $F \times G$ в E. Отображение $x \to f(x, y)$ множества F в E при фиксированном y из G называется частным отображением f_y, так что по определению $f_y(x) = f(x, y)$. Таким образом, f из $E^{F \times G}$ определяет некоторое отображение $y \to f_y$ множества G в множество E^F отображений F в E, т. е. элемент $(E^F)^G$. Обратно, если $y \to g_y$ является отображением G в E^F, то оно порождается с помощью предыдущего процесса из отображения g множества $F \times G$ в E, определяемого по формуле $g(x, y) \to g_y(x)$. Тем самым нами установлена биекция $E^{F \times G}$ на $(E^F)^G$, откуда $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$.

Эти формулы могут убедить читателя в том, что кардинальные числа, даже трансфинитные, обладают всеми свойствами обычных натуральных целых чисел, но это не так, как показывает приводимое ниже удивительное свойство, которое мы примем без доказательства.

Теорема 5. *Если α и β — два кардинальных числа $\neq 0$ и если по крайней мере одно из них трансфинитно, то сумма $\alpha+\beta$ и произведение $\alpha\beta$ равны наибольшему из них*[1]).

[1]) Доказательство весьма замысловато.

Отсюда, в частности, вытекает, что для кардинальных бесконечных чисел определить вычитание невозможно, ибо среди чисел, прибавление которых к α дает α, фигурирует не только 0, но и любое конечное число и даже само α.

Теорема 6. *Каково бы ни было множество E, множество его частей имеет мощность, строго большую мощности E.*

Эта теорема показывает, что последовательность кардинальных бесконечных чисел не ограничена.

В самом деле, предположим, что существует сюръекция f множества E на множество частей $\mathfrak{P}(E)$. Тогда, для $x \in E$, $f(x)$ является элементом $\mathfrak{P}(E)$, т. е. некоторой частью E. Обозначим через A часть E, образованную из таких $x \in E$, что $x \notin f(x)$. Так как $A \subset \mathfrak{P}(E)$, то в E существует по крайней мере один элемент y, такой, что $f(y) = A$. Если $y \in f(y) = A$, то, по определению множества A, $y \notin A$, что невозможно. Если $y \notin f(y) = A$, то $y \in A$. В обоих случаях мы приходим к противоречию.

Поскольку, однако, существует инъекция E в $\mathfrak{P}(E)$, а именно $x \to \{x\}$, то E имеет мощность, меньшую мощности $\mathfrak{P}(E)$, а значит, строго меньшую мощности $\mathfrak{P}(E)$.

Замечание 1. Если E бесконечно, то множество $\mathfrak{P}_f(E)$ конечных частей E равномощно множеству E. Это легко доказывается с помощью приводимой ниже теоремы 7. Отображение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ставящее в соответствие каждому элементу $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из E^n $(n \geqslant 1)$ часть E, образованную из этих элементов (не обязательно различных), является некоторой сюръекцией E^n на множество $\mathfrak{P}_n(E)$ непустых частей E, образованных не более чем из n элементов. Но тогда $\operatorname{card} \mathfrak{P}_n(E) \leqslant \operatorname{card} E^n = \operatorname{card} E$ (теорема 5), и поскольку $\operatorname{card} \mathfrak{P}_n(E) \geqslant \operatorname{card} E$, то $\operatorname{card} \mathfrak{P}_n(E) = \operatorname{card} E$. Пусть теперь $f_n\colon x \to f_n(x)$ — некоторая биекция E на $\mathfrak{P}_n(E)$. Положим $f_0(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in E$. Тогда $(n, x) \to f_n(x)$ будет некоторой сюръекцией $\mathbb{N} \times E$ на $\mathfrak{P}_f(E)$, а значит, $\operatorname{card} \mathfrak{P}_f(E) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{N} \times E) = \nu \operatorname{card} E = \operatorname{card} E$ (в силу теоремы 7, неравенства $\nu \leqslant \operatorname{card} E$ и теоремы 5). Поскольку обратное неравенство очевидно, окончательно получаем: $\operatorname{card} \mathfrak{P}_f(E) = \operatorname{card} E$.

Замечание 2. Характеристической функцией некоторой части A множества E называется функция φ_A, определенная на E, со значениями в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, такая, что

$$\varphi_A(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \in A, \quad \text{и} \quad \varphi_A(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin A. \qquad (I, 5; 2)$$

Задание этой функции однозначно определяет часть A. Впрочем, всякая функция на E, принимающая значения 0 и 1, единственным образом определяет некоторую часть E. Существует, таким образом, некоторая биекция множества $\mathfrak{P}(E)$ частей E

на множество отображений E в множество $\{0, 1\}$. Отсюда следует, что кардинальным числом множества $\mathfrak{P}(E)$ является $2^{\operatorname{card} E}$.

Предыдущую теорему теперь можно сформулировать следующим образом:

Каково бы ни было кардинальное число α, $2^{\alpha} > \alpha$ [1]).

Мы сейчас изучим две наиболее важные трансфинитные мощности: мощность счетного множества и мощность континуума.

Счетные множества

Мощностью счетного множества ν *называется мощность множества* $\mathbb{N}$ *целых натуральных чисел. Всякое множество, равномощное* $\mathbb{N}$, *называется счетным* [2]).

Теорема 7. ν *является наименьшим трансфинитным кардинальным числом.*

Это означает лишь, что всякое бесконечное множество E содержит по меньшей мере одну счетную часть. Предположим, что для некоторого бесконечного множества E соотношение $\operatorname{card} E > \nu$ не имеет места. Согласно теореме 3, это означает, что существует биекция E на некоторую бесконечную часть P множества $\mathbb{N}$. Отображение $n \to x_n$, где x_n есть $(n+1)$-й (в порядке возрастания) элемент P, определяет биекцию $\mathbb{N}$ на P. Окончательно получаем, что $\operatorname{card} E = \nu$.

Теорема 8. *Для любого конечного числа* $m \geqslant 1$ *выполняются равенства* $m\nu = \nu$ *и* $\nu^m = \nu$.

Результат непосредственно вытекает из теоремы 5, согласно которой $m\nu = \nu$ при $m \leqslant \nu$ и $\nu^2 = \nu\nu = \nu$, а следовательно, по индукции $\nu^m = \nu$. Однако мы приняли теорему 5 без доказательства, в то время как равенство $\nu\nu = \nu$, из которого вытекает теорема 8, доказывается элементарно.

---

[1]) В частности, для любого целого $n \geqslant 0$ имеем $2^n > n$.

[2]) Сказать, что некоторое множество счетно, означает сказать, что оно допускает *по крайней мере* одну биекцию на $\mathbb{N}$. Однако это не значит, что такая биекция задана. Это означает также, что *возможно* расположить элементы данного множества в некоторую последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, хотя сама эта последовательность не задана. Часто кардинальное число множества обозначают через $\aleph^0$ ($\aleph$ — «алеф» — первая буква древнееврейского алфавита). Во многих работах счетными называют множества, кардинальные числа которых $\leqslant \nu$. Множество E конечно или счетно ($\operatorname{card} E \leqslant \nu$) тогда и только тогда, когда существует инъекция E в $\mathbb{N}$, или, если положить $E \neq \emptyset$, тогда и только тогда, когда существует сюръекция $\mathbb{N}$ на E.

Покажем, что $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *равномощно* $\mathbb{N}$. Если элементы $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ перенумеровать в порядке, определяемом последовательными линиями, параллельными диагонали квадратной таблицы:

$$\begin{array}{lllll}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \ldots\ldots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots\ldots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots\ldots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots\ldots \\
(4,0) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

то получится последовательность (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), ..., определяющая биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Следствия. 1°) *Объединение конечного или счетного множества конечных или счетных частей множества E конечно или счетно.*

В самом деле, пусть I — некоторая часть $\mathbb{N}$ и A_i, $i\in I$, — некоторые части E. Можно предположить, что ни одна из них не пуста, так как пустые множества ничего не изменяют в объединении. Пусть f_i — некоторая сюръекция $\mathbb{N}$ на A_i. Тогда $(i, n)\to f_i(n)$ будет являться сюръекцией $I\times\mathbb{N}$ на $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Поскольку $I\times\mathbb{N}$ счетно (или пусто, если I пусто), то $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ конечно или счетно.

2°) *Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно* (как объединение двух счетных множеств). *Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.*

В самом деле, отображение, ставящее каждой паре (p, q), $q\neq 0$, множества $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ в соответствие рациональное число p/q, является сюръекцией подмножества $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$. Значит, $\mathbb{Q}$ не более чем счетно, но так как оно содержит $\mathbb{N}$, то $\mathbb{Q}$ счетно.

3°) *Множество алгебраических вещественных чисел счетно.* Алгебраическим вещественным числом называется вещественный корень некоторого не равного тождественно нулю полинома с целыми коэффициентами.

Поскольку не равный тождественно нулю полином степени $\leqslant m$ с целыми коэффициентами имеет $m+1$ коэффициентов, которые являются произвольными целыми числами и не все равны нулю, то мощность множества этих полиномов равна $\nu^{m+1}=\nu$.

Каждый такой полином имеет не более m алгебраических вещественных корней, а следовательно, множество алгебраических чисел, корней полиномов степени $\leqslant m$, можно рассматривать как объединение счетного множества конечных множеств. Такое множество не более чем счетно, а так как оно бесконечно, то оно счетно. Поскольку m принимает все значения, то множество всех алгебраических чисел получается как объединение счетного множества счетных множеств, а значит, является счетным множеством.

4°) *Множество всех точек* $\mathbb{R}^n$ *с рациональными или алгебраическими координатами счетно, ибо его кардинальное число равно* $\nu^n = \nu$.

Мощность континуума

Теорема 9. *Множество всех вещественных чисел несчетно.*

Доказательство. Покажем, что даже множество E вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x < 1$, несчетно. Допустим, что E счетно и существует некоторая биекция $\mathbb{N}_1$ на E, т. е. элементы E могут быть записаны в виде попарно различных элементов некоторой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Кроме того, рассмотрим вещественное число ξ, определяемое следующим образом: перед запятой мы поставим 0, затем в качестве j-го десятичного знака выберем произвольное целое число между 1 и 8, отличное от j-го десятичного знака числа x_j. Таким путем мы образуем бесконечную дробь, определяющую некоторое число ξ. Поскольку n-й десятичный знак числа ξ отличен от n-го десятичного знака числа x_n и все десятичные знаки числа ξ отличны от 0 и 9, то $\xi \neq x_n$. (Применение десятичных знаков 0 и 9 может создать затруднения, поскольку число, в десятичном разложении которого, начиная с некоторого места, стоят только нули, допускает иное десятичное разложение, содержащее с некоторого места одни девятки, например $0{,}102000 \ldots = 0{,}101999 \ldots$.) Итак, мы пришли к противоречию: множество $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ не содержит числа, расположенного на отрезке $[0, 1[$.

Трансцендентные числа

Вещественные числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, а множество вещественных несчетно, то существуют трансцендентные числа и даже «большинство» вещественных чисел трансцендентны. Однако, несмотря на это, не так легко указать явно трансцендентные числа. Можно доказать (но это вовсе не очевидно!), например, что числа e и π трансцендентны.

Замечание. Часть множества $E=[0, 1[$, образованная из чисел, в десятичном разложении которых имеются лишь цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, является множеством, равномощным множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^{\mathbb{N}}$, т. е. имеет мощность 8^ν.

Что же касается самого множества E, то его мощность $\leqslant 10^\nu$ (мы пишем $\leqslant$, а не $=$ из-за указанного выше двоякого десятичного представления чисел). Поэтому $8^\nu \leqslant \operatorname{card} E \leqslant 10^\nu$, откуда $2^\nu \leqslant \operatorname{card} E \leqslant 16^\nu = (2^4)^\nu = 2^{4\nu} = 2^\nu$, а значит, $\operatorname{card} E = 2^\nu$. Только что доказанная теорема является лишь частным случаем теоремы 6. Впрочем, приведенное доказательство *является лишь частным случаем* доказательства теоремы 6 (небольшое усложнение возникло в силу двойственного десятичного представления чисел).

Будем обозначать через γ мощность множества $E=[0, 1]$ и называть его *мощностью континуума. Мощность континуума — это мощность множества* $\mathbb{R}$ *вещественных чисел* (ибо $x \to \log x/(1-x)$ является биекцией $]0, 1[$ на $\mathbb{R}$).

Теорема 10. *Имеют место равенства* $m\gamma = \nu\gamma = \gamma\gamma = \gamma^m = \gamma^\nu = \gamma$, *где* $m \geqslant 1$ — *произвольное целое конечное число.*

Доказательство. Все эти кардинальные числа $\leqslant \gamma^\nu$ и $\geqslant \gamma$, поэтому достаточно доказать, что $\gamma^\nu = \gamma$. Легко видеть, что $\gamma^\nu = (2^\nu)^\nu = 2^{\nu^2} = 2^\nu = \gamma$.

Следствия[1]. 1°) *Множество комплексных чисел имеет мощность континуума* (поскольку оно равномощно $\mathbb{R}^2$).

2°) *Любое векторное пространство конечного числа измерений n над полем вещественных или комплексных чисел имеет мощность континуума.*

Действительно, зафиксировав базис, легко определить биекцию такого пространства на $\mathbb{R}^n$, имеющего, согласно равенству $\gamma^n = \gamma$, мощность континуума. Отсюда, в частности, вытекает парадоксальное следствие о существовании биекции $\mathbb{R}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$, поскольку множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ равномощны. Когда сравнивают семейства точек, кривых, поверхностей, зависящих от некоторого числа параметров, то часто говорят, что одно из этих семейств больше другого, поскольку его элементы зависят от трех вещественных параметров, в то время как элементы другого зависят лишь от двух параметров. Такое рассуждение

[1]) Эти следствия, точно так же как и многие другие элементарные свойства счетных множеств и континуума, могут быть доказаны учащимися младших курсов непосредственно, т. е. без применения принятых нами без доказательства больших теорем 3, 4, 5.

не является строгим, поскольку $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ равномощны. Во второй главе, посвященной топологии, мы познакомимся с другими типами сравнений, но ни в коем случае не следует сравнивать бесконечности в описанном смысле.

3°) Множество всех последовательностей вещественных чисел и последовательностей комплексных чисел имеет мощность континуума, ибо их кардинальное число равно $\gamma^\nu = \gamma$.

4°) Множество E непрерывных вещественных функций вещественной переменной имеет мощность континуума. В самом деле, каждой такой функции можно поставить в соответствие последовательность вещественных чисел — значений функции в точках с рациональными абсциссами. Можно считать также, что эти точки находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{N}$, поскольку $\mathbb{Q}$ счетно. Конечно, последовательность этих значений не произвольна: если бы значения функции в рациональных точках выбирались произвольно, то невозможно было бы ее продолжить непрерывно на всю вещественную прямую. Однако последовательность вещественных чисел, соответствующая непрерывной функции, ее полностью определяет. Следовательно, можно установить биекцию множества непрерывных функций на часть множества последовательностей вещественных чисел. Значит, это множество E имеет мощность, не большую мощности континуума. А так как отображение, которое каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее значение в одной точке, например, в начале координат, является сюръекцией E на $\mathbb{R}$, то E имеет мощность, не меньшую мощности континуума. Отсюда следует, что E имеет мощность, в точности равную мощности континуума.

5°) Множество всех вещественных функций вещественной переменной или даже множество всех функций, принимающих только значения 0 и 1, имеет мощность, строго большую мощности континуума, ибо их мощности равны соответственно γ^γ и 2^γ, а $\gamma^\gamma = (2^\nu)^\gamma = 2^{\nu\gamma} = 2^\gamma > \gamma$. Из 4°) и 5°) вытекает, что «большинство» функций имеет не менее одной точки разрыва.

Континуум-гипотеза

Согласно этой гипотезе, 2^ν является кардинальным числом, непосредственно следующим за ν. В общем случае *обобщенная континуум-гипотеза* заключается в предположении, что при любом кардинальном числе α кардинальное число 2^α непосредственно следует за α.

Недавно доказано (П. Коэн, 1963), что континуум-гипотеза *неразрешима* — ее невозможно ни доказать, ни опровергнуть, можно лишь принять ее или противоположное ей утверждение как аксиому.