§ 6. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ

Всякая теорема заключается, вообще говоря, в том, что задается некоторое свойство A, называемое *условием*, из которого выводится свойство B, называемое *заключением*.

Коротко выражение «A влечет B» записывается формулой $A \Rightarrow B$. Обратная теорема, которая не всегда справедлива, запишется тогда в виде $B \Rightarrow A$.

Если данная теорема и ей обратная обе справедливы, то свойства A и B эквивалентны, и такую теорему можно записать в виде $A \Leftrightarrow B$, что также выражается в форме: «Для того чтобы $A \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы $B \ldots$».

Утверждение, противоположное некоторому свойству A, записывается «не A», или $\neg A$. Если x не принадлежит множеству E, то пишут $x \notin E$. Если X и Y — части E и если X не содержится в Y, то пишут $X \not\subset Y$ (что вовсе не означает, что X содержит Y).

Во всех случаях «не не A» $= A$, и справедливо утверждение: «или A, или не A» (принцип исключенного третьего).

Теорема 11. *Предложение $A \Rightarrow B$ справедливо тогда и только тогда, когда верно предложение $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

Доказательство. 1°) Предположим, что $A \Rightarrow B$ верно и в то же время имеет место $\neg B$. Тогда свойство A невозможно без того, чтобы не было справедливым B, что противоречит свойству $\neg B$. Мы имеем, следовательно, свойство $\neg A$, что доказывает справедливость предложения $\neg B \Rightarrow \neg A$.

2°) Если справедливо предложение $\neg B \Rightarrow \neg A$, то, согласно 1°), справедливо $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$. Так как $\neg\neg A = A$ и $\neg\neg B = B$, то справедливо предложение $A \Rightarrow B$.

Пример. Эквивалентными являются следующие предложения: «Любая вещественная функция, непрерывная на конечном вещественном интервале $[a, b]$, ограничена» и «Любая вещественная функция, определенная на $[a, b]$ и не ограниченная на нем, разрывна по крайней мере в одной точке».

Когда некоторый объект обладает свойством A или свойством B, то пишут, что он удовлетворяет $A \vee B$ или еще «A или B». В математике связка *или* никогда не относится к событиям, обязательно исключающим одно другое. «*A или B*» вовсе не исключает одновременного выполнения A и B. Например, если A означает $x \leqslant 0$, а B означает $x \geqslant 0$, то имеет место A или B. Эти два свойства не исключают друг друга, поскольку возможно, что $x = 0$.

Если имеют место одновременно свойства A и B, то это записывается в виде $A \wedge B$ или же «A и B».

В математических теоремах часто используются выражения: «Для всех ...» и «Существует ... такое, что ...». Их обозначают соответственно через $\forall$ и $\exists$ и называют *кванторами*.

Предложения «Для всех ...» и «Существует ...» часто сопровождаются некоторыми ограничениями. Эти ограничения обычно записываются в круглых скобках.

Предположим, что для некоторой вещественной функции f вещественной переменной мы хотим сформулировать свойство быть непрерывной в каждой точке. Непрерывность функции в точке a означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\eta > 0$, такое, что неравенство $|x - a| \leqslant \eta$ влечет за собой неравенство $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Иначе говоря, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\eta > 0$, такое, что для любого $x \in \mathbb{R}$, такого, что $|x - a| \leqslant \eta$, имеет место свойство P: $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Для того чтобы теперь выразить, что функция непрерывна *в любой точке*, мы должны записать:

(Для всех $a \in \mathbb{R}$) (для всех $\varepsilon > 0$) (существует $\eta > 0$, такое, что) (для всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что $|x - a| \leqslant \eta$) имеем P: $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Эта фраза коротко записывается в виде:

$$(\forall a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon. \qquad (\mathrm{I}, 6;\ 1)$$

Теорема 12. *Отрицание свойства, содержащего некоторое число кванторов $\forall$, $\exists$ и свойство P, получается заменой каждого квантора $\forall$ на $\exists$ и $\exists$ на $\forall$ и свойства P на его отрицание $\neg P$.*

Так, например, свойство вещественной функции вещественной переменной не быть всюду непрерывной, т. е. иметь разрыв хотя бы в одной точке, может быть записано в одну строку

$$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\exists x \in R,\ |x - a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| > \varepsilon. \qquad (\mathrm{I}, 6;\ 2)$$

Этот метод отрицания свойства применяется так же автоматически, как и правило знаков в умножении или при раскрытии скобок.

Доказательство. Предположим, что имеется один квантор, например $\forall$. Наше свойство имеет тогда вид:

$$(\forall x, \text{ удовлетворяющий } S) : P.$$

Его отрицание очевидно: существует некоторое x, удовлетворяющее S, но не обладающее свойством P, т. е.

$$(\exists x, \text{ удовлетворяющий } S) : \neg P.$$

Теорема для данного случая доказана. Аналогичное доказательство имеет место для случая, когда имеется только квантор $\exists$. Для завершения доказательства теперь достаточно применить индукцию по произвольному числу кванторов.

Предположим, что теорема доказана в том случае, когда имеется $n-1$ квантор, и докажем ее для случая, когда их имеется n. Пусть рассматриваемое свойство записано, например, в виде

$$(\forall x, \text{ удовлетворяющее } S) : Q,$$

где Q — свойство, содержащее $n-1$ кванторов. Тогда, в силу доказанного выше, его отрицанием будет свойство:

$$(\exists x, \text{ удовлетворяющий } S) : \neg Q.$$

Однако $\neg Q$ можно получить, используя теорему, поскольку Q содержит только $n-1$ квантор. Итак, теорема для этого случая верна. Тот же самый результат получится, если первым квантором является $\exists$, а следовательно, теорема имеет место в общем случае.

Замечание Каждый раз, когда квантор $\exists$ предшествует некоторому числу других кванторов, следующая за ним буква может оказаться функцией всех букв, фигурирующих в предыдущих кванторах.

Например, в свойстве функции быть всюду непрерывной η зависит от a и от ε. Может случиться, что η можно выбирать в зависимости только от ε, а не от a. В этом случае говорят, что функция равномерно непрерывна. Свойство функции быть равномерно непрерывной более сильное, чем свойство быть непрерывной. Его можно записать следующим образом:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall a \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 6; 3}$$

Очевидно, перестановка кванторов существенно изменяет заданное свойство. Непосредственно видно, что самым сильным является такое свойство, в котором символ $\exists$ поставлен как можно раньше. Производя, например, еще одну перестановку, получим:

$$(\exists \eta > 0)\,(\forall a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leqslant \eta) : |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon. \tag{I, 6; 4}$$

Фиксируем η, о котором говорится в самом начале, что оно существует. Для любого x из интервала $[a-\eta, a+\eta]$ имеет место неравенство $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, что означает $|f(x)-f(a)| = 0$. Но тогда $f(x) = f(a)$ для любого a и любого x из интервала $[a-\eta, a+\eta]$. Выбирая в качестве a все числа вида $p/10^b$, где целое p изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и выбрано так, что $p/10^b \leqslant \eta$, ..., получаем: предложение (I, 6; 4) означает, что f постоянна. Получаем еще большее усиление свойства непрерывности!

N. B. Мы рассматривали теорию множеств и логику с «наивной» точки зрения. Слова: множество, равный, каков бы ни был, существует, влечет и т. д. ... употреблялись в том смысле, какой они имеют в разговорном языке. Совершенно ясно, что при этом не проводилось никакого серьезного математического обоснования смысла этих понятий. Символы $\forall$, $\exists$, $\in$, $=$, $\Rightarrow$ должны были быть только знаками, подчиняющимися некоторым «правилам игры», как конь и ладья в шахматах являются фигурами с определенными правилами передвижений, не совпадающими с теми, какими обладают настоящие конь или ладья. Точно так же евклидова плоскость — это не поверхность воды, а сфера — это не апельсин. Математическая логика (содержащая теорию множеств) является ветвью современной математики. Заметим, что еще не доказана ее непротиворечивость. Логическая теория называется *противоречивой*, если существует такое предложение P, для которого можно одновременно доказать как P, так и $\neg P$. В этом случае будет справедливым любое предложение Q (а также и $\neg Q$). В самом деле, соотношения $P \Rightarrow (P$ или $Q)$ и $((P$ или $Q)$ и $\neg P) \Rightarrow Q$ дают $(P$ и $\neg P) \Rightarrow Q$. Однако если современная теория множеств противоречива, то это еще не означает, что мы находимся в безнадежном положении. Надо лишь уменьшить число аксиом теории, что, без сомнения, не изменит заметно математики в целом!