ГЛАВА II

Топология

§ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕРЫ

Множество E называется *метрическим пространством*, если для его элементов определено понятие *расстояния*, т. е. определено некоторое отображение множества $E \times E$ в полупрямую $R_+ = \{x, x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$, которое каждой паре (x, y) из $E \times E$ ставит в соответствие некоторое число $d(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между x и y.

Расстояние должно обладать следующими тремя свойствами:

1) симметрия: $d(x, y) = d(y, x)$;
2) положительность $d(x, y) > 0$, если $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$;
3) неравенство треугольника: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон). (II, 1; 1)

Из неравенства треугольника как следствие вытекает, что каждая сторона треугольника не меньше разности двух других сторон:

$$d(x, z) \geqslant |d(x, y) - d(y, z)|. \qquad \text{(II, 1; 2)}$$

Из этого же неравенства вытекает также, что для произвольных n точек множества имеет место неравенство

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n). \qquad \text{(II, 1; 3)}$$

Приведем сразу же ряд важных примеров метрических пространств:

1°) Вещественная прямая $\mathbb{R}$ и комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с расстоянием $d(x, y) = |x - y|$. Эту метрику называют естественной метрикой в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Всюду, где специально не оговорено противное, в пространствах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ метрика считается естественной.

2°) Вещественная прямая $\mathbb{R}$, для точек которой расстояние определено формулой $d(x, y) = |F(x) - F(y)|$, где F — произвольная вещественная строго монотонная функция вещественной переменной.

3°) Евклидово вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ или унитарное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ n измерений, расстояние между точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в котором определено формулой $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$.

Несколько позже мы строго докажем, что здесь действительно определено метрическое пространство (стр. 43). Введенную метрику называют естественной метрикой $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Если не оговорено противное, то метрика в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ всегда будет считаться естественной.

4°) В произвольном множестве можно ввести *дискретную метрику*, положив $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$.

Сферы. Шары

Сферой с центром a конечного радиуса $R > 0$ называется множество точек x из E, таких, что $d(a, x) = R$. Из определения вовсе не следует, что такая сфера не пуста или что две сферы с различными центрами не совпадают (пример: в дискретной метрике все сферы радиуса 2 совпадают и пусты).

Множество точек x из E, таких, что $d(a, x) < R$ (соответственно $\leqslant R$), обозначается через $B_0(a, R)$ (соответственно $B(a, R)$) и называется *открытым* (соответственно *замкнутым*) *шаром* с центром в a и конечным радиусом $R > 0$ [1].

Когда говорят о шаре без каких-либо пояснений, то имеют в виду замкнутый шар. В дискретной метрике замкнутый шар радиуса < 1 сводится к его центру. Шар (замкнутый) радиуса $\geqslant 1$ совпадает со всем пространством. (Для $R = 0$ открытый шар пуст, сфера же и замкнутый шар сводятся к их центрам. *Мы будем всегда предполагать, даже если это специально не оговорено, что радиусы сфер или шаров конечны и* > 0.)

Часть метрического пространства называется *ограниченной*, если существует шар (как всегда, конечного радиуса), в котором она содержится. Множество $\mathbb{R}$ и часть $\mathbb{N}$ множества $\mathbb{R}$ не ограничены. Однако если в E введена дискретная метрика, то E ограничено.

Нормированные векторные пространства

Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел. *Нормой* в векторном пространстве E называется любая функция, обозначаемая через $\vec{x} \to \|\vec{x}\|$ [2],

---

[1]) Мы делаем строгое различие между понятиями сферы и шара. В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ говорят *окружность* вместо сферы и *круг* вместо шара.

[2]) Договоримся всегда ставить стрелку над элементами векторного пространства. При этом мы будем строго различать число 0 и нуль $\vec{0}$ векторного пространства.

обладающая следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) положительность: } \|\vec{x}\|>0 \text{ для } \vec{x}\neq\vec{0} \text{ и } \|\vec{0}\|=0; \\ \text{2) преобразование при гомотетии: } \|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|,\ \lambda\in K; \\ \text{3) условие выпуклости: } \|\vec{x}+\vec{y}\|\leqslant\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|. \end{array}\right\} \quad \text{(II, 1; 4)}$$

Из 2) и 3) легко выводится обобщенное условие выпуклости

$$\|\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n\|\leqslant\|\vec{x}_1\|+\|\vec{x}_2\|+\ldots+\|\vec{x}_n\|, \quad \text{(II, 1; 5)}$$

а также неравенство

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|\geqslant|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\||. \quad \text{(II, 1; 6)}$$

Если в векторном пространстве E введена норма, обладающая указанными выше свойствами, то его называют *нормированным векторным пространством.*

Символ $\|\ \|$, естественно, можно употреблять лишь тогда, когда речь идет о некоторой раз и навсегда определенной норме. Если в одной и той же задаче для одного и того же векторного пространства вводится несколько различных норм, то их следует обозначать различными символами.

Пусть E — нормированное векторное пространство. В этом пространстве можно определить расстояние между элементами, удовлетворяющее всем аксиомам расстояния, по формуле: $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$. Таким образом, *любое нормированное векторное пространство является автоматически метрическим пространством.* Расстояние в нем обладает дополнительными свойствами, совместимыми с его векторной структурой: расстояние инвариантно относительно сдвига, иначе говоря, $d(\vec{x}-\vec{a},\vec{y}-\vec{a})=d(\vec{x},\vec{y})$, а гомотетия с коэффициентом гомотетии λ приводит к умножению расстояния на $|\lambda|$, т. е. $d(\lambda\vec{x},\lambda\vec{y})=|\lambda|d(\vec{x},\vec{y})$. Обратно, легко видеть, что любое расстояние в векторном пространстве, обладающее двумя этими свойствами, определяет в нем некоторую норму, а именно: $\|\vec{x}\|=d(\vec{0},\vec{x})$.

Под *открытым шаром радиуса* R в векторном пространстве, если не указан его центр, мы будем понимать шар радиуса R с центром в нуле векторного пространства. Аналогично определяется *замкнутый шар.* Они обозначаются соответственно через $B_0(R)$ и $B(R)$.

В частности, *единичный открытый* (соответственно замкнутый) *шар* есть открытый (замкнутый) шар с центром в $\vec{0}$ радиуса 1. *Единичный шар* без каких-либо уточнений означает просто единичный замкнутый шар.

Отрезком с концами a и b в векторном пространстве над полем вещественных или комплексных чисел называется множество всех точек вида $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Его обозначают через $[a, b]$ точно так же, как и замкнутый интервал в упорядоченном множестве. Говорят, что некоторая часть множества E *выпукла*, если вместе с любыми двумя различными точками этого множества она содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Из условия выпуклости следует, что всякий шар нормированного векторного пространства является выпуклым множеством. В самом деле, если $\|\vec{x}\| \leqslant R$ и $\|\vec{y}\| \leqslant R$, то

$$\|t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\| \leqslant \|t\vec{x}\|+\|(1-t)\vec{y}\| = \\ = |t|\,\|\vec{x}\|+|1-t|\,\|\vec{y}\| \leqslant [t+(1-t)]R = R. \qquad \text{(II, 1; 7)}$$

Приведем примеры нормированных векторных пространств:

1°) Функция $x \to |x|$, определенная над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, является нормой. Она определяет упоминавшуюся ранее (1°, стр. 40) естественную метрику.

2°) Функции

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max_{i=1, \ldots, n} |x_i|, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{или} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

в векторных пространствах $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ определяют некоторые нормы. Для первых двух норм это очевидно. Проверим выполнение аксиом нормы в третьем случае. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — две системы n комплексных чисел. Для доказательства условия выпуклости

$$\left(\sum |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum |y_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{(II, 1; 8)}$$

заметим, что левая часть этого неравенства не превосходит $\left(\sum (|x_i|+|y_i|)^2\right)^{1/2}$, а значит, достаточно доказать, что

$$\sum (|x_i|+|y_i|)^2 \leqslant \sum |x_i|^2 + \sum |y_i|^2 + 2\left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum |y_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{(II, 1; 9)}$$

или

$$\sum |x_i|\,|y_i| \leqslant \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum |y_i|^2\right)^{1/2}. \qquad \text{(II, 1; 10)}$$

Это — известное неравенство Коши — Буняковского — Шварца [1]).

Норма $x=(x_1, \ldots, x_n) \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ называется естественной нормой в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Позже мы познакомимся с другими важными примерами векторных нормированных бесконечномерных пространств.

---

[1]) См., например, книгу И. М. Гельфанда «Лекции по линейной алгебре», «Наука», 1966, стр. 35. — *Прим. ред.*