§ 2. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ ЧАСТИ. ОКРЕСТНОСТИ. ВНУТРЕННОСТЬ. ГРАНИЦА. ЗАМЫКАНИЕ. ПЛОТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Открытые части

Пусть E — метрическое пространство. Часть A пространства E называется *открытой*, если вместе с каждой своей точкой она содержит некоторый открытый шар (радиуса >0) с центром в этой точке[1]).

Открытые части пространства E обладают, очевидно, следующими свойствами:

a) само пространство E и его пустая часть $\emptyset$ открыты[2]);

b) пересечение конечного числа открытых множеств открыто;

c) объединение конечного или бесконечного числа открытых множеств открыто.

(II,2;1)

Докажем, например, свойство b).

Пусть $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ — открытые подмножества E и x — произвольный элемент их пересечения. Для каждого i существует такое число $R_i > 0$, что шар $B(x, R_i)$ полностью содержится в $\mathcal{O}_i$. Если теперь положить $R = \min\limits_{i=1, 2, \ldots, n} (R_i)$, то шар $B(x, R)$ будет содержаться в рассматриваемом пересечении, а, значит, пересечение открыто.

Имеет место интересное четвертое свойство, называемое *аксиомой отделимости Хаусдорфа*.

d) Каковы бы ни были различные точки a и b пространства E, существуют две открытые непересекающиеся части E, содержащие соответственно a и b.

В самом деле, если взять открытые шары с центрами в точках a и b радиуса $d/3$, где d — расстояние $d(a, b)$, то эти шары

[1]) Короче: A является открытой частью в E, если $(\forall x \in A)\ (\exists \rho > 0)\ (\forall y \in E,\ d(x, y) < \rho) : y \in A$, или еще короче: $(\forall x \in A)\ (\exists \rho > 0) : B_0(x, \rho) \subset A$. Естественно, ρ зависит от x. В определении можно «открытый шар» заменить на «замкнутый шар», поскольку замкнутый шар радиуса ρ содержит открытый шар радиуса ρ, а открытый шар радиуса ρ содержит замкнутый шар радиуса $\rho/2$.

[2]) Множество A открыто, если для любого $x \in A$ существует шар с центром в x, содержащийся в A. Если $A = \emptyset$, то найти точку $x \in A$ невозможно, а потому указанное свойство выполняется и $\emptyset$ открыто. Приведем другой пример того же самого логического рассуждения. Будем говорить, что человек обладает свойством (P), если его рост больше роста его детей. Тогда люди, не имеющие детей, будут, очевидно, обладать свойством (P). Можно, впрочем, исходить из отрицания рассматриваемого свойства. Некоторая часть A не является открытой, если найдется хотя бы один элемент $x \in A$, для которого не существует шара с центром в x, содержащегося в A. Множество $\emptyset$ не может не быть открытым, так как элементов $x \in \emptyset$ не существует. Пустое множество, таким образом, открыто.

не будут иметь общей точки, так как в противном случае для такой точки c из неравенства треугольника $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$ получилось бы неравенство $d(a, b) \leqslant 2d/3$, которое неверно.

Примеры. *Открытые шары* являются открытыми, и это оправдывает их название. В частности, при введении естественной метрики на прямой $\mathbb{R}$ открытые интервалы являются открытыми множествами. Легко проверяется от противного, что замкнутые или полуоткрытые интервалы открытыми множествами не являются.

Для того чтобы некоторая часть E была открытой, необходимо, согласно определению, чтобы она была объединением открытых шаров. Однако это условие и достаточно, поскольку каждый открытый шар открыт, а объединение открытых частей открыто (свойство c)). Приведенное условие является, следовательно, необходимым и достаточным для того, чтобы некоторое множество было открытым.

В пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженном метрикой, которая определяется одной из указанных на стр. 43 норм, *открытый параллелепипед*, т. е. множество

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

является открытой частью.

В любом метрическом пространстве множество точек x, удовлетворяющих неравенству $d(a, x) > R$, открыто.

В дискретной метрике (пример 4°), стр. 41) все части E открыты.

Замкнутые части

Замкнутой называется любая часть пространства E, дополнение к которой в E открыто.

Переходом к дополнениям в свойствах a), b), c) открытых частей непосредственно получаются эквивалентные свойства замкнутых частей:

a′) E и $\emptyset$ замкнуты;

b′) объединение конечного числа замкнутых частей замкнуто;

c′) пересечение конечного или бесконечного числа замкнутых частей замкнуто[1]). (II, 2; 2)

Переход от открытых множеств к замкнутым в аксиоме Хаусдорфа интересного результата не дает.

[1]) Следствие из теоремы 15 дает наилучший практический критерий для определения замкнутости множества.

Примеры. Всякая часть, сводящаяся к одной или конечному числу точек, замкнута. *Замкнутый шар* является замкнутой частью. В частности, каждый *замкнутый интервал* вещественной прямой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой замкнут, в то время как полуинтервал или открытый интервал не замкнуты. Множество $\{x : d(a, x) \geqslant \mathbb{R}\}$ замкнуто. Любая сфера замкнута.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ с одной из введенных метрик, указанных на стр. 43, *замкнутый параллелепипед*, определенный неравенствами $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, является замкнутой частью.

В дискретной метрике все части E замкнуты.

Замечания. 1°) Рассматривая объединение и пересечение семейств открытых или замкнутых частей, очень важно тщательно различать случаи, когда рассматриваемое семейство конечно или бесконечно.

Например, на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой часть, сводящаяся к точке, замкнута, но не открыта, и в то же время она является пересечением счетного множества открытых интервалов. Точно так же открытый интервал не замкнут, и в то же время он является объединением счетного множества вложенных в него замкнутых интервалов.

2°) Существуют части E, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми; например, полуоткрытые интервалы в $\mathbb{R}$.

3°) Как показывает пример дискретной метрики, кроме $\emptyset$ и E, могут существовать и другие множества, являющиеся одновременно и открытыми, и замкнутыми[1].

Окрестности

Окрестностью точки a множества E называется любая часть E, содержащая по крайней мере одно открытое множество, содержащее точку a (или же содержащая открытый или замкнутый шар с центром в точке a).

Кроме свойства включать в себя точку a, окрестности точки a обладают следующими свойствами:

a″) всякая часть, содержащая окрестность a, является окрестностью a;

b″) пересечение конечного числа окрестностей точки a является окрестностью a;

c″) аксиома отделимости Хаусдорфа: каковы бы ни были различные точки a и b множества E, существуют не пересекающиеся окрестности точек a и b.

(II, 2; 3)

[1]) Сравните с изложенным в § 9.

Следует заметить, что слово «окрестность» может ввести в заблуждение: создается впечатление, что окрестность точки a является множеством, весьма близким к a, и что чем меньше множество, тем вероятнее, что оно является окрестностью точки a. В действительности свойство а) окрестностей показывает, что, напротив, чем часть A множества E больше, тем скорее она может быть окрестностью точки a. Все пространство E является окрестностью точки a, и, кроме исключительных случаев, таких, как случай дискретной метрики, часть, сводящаяся к самой точке a, не является окрестностью точки a.

Говорят, что некоторая точка E *изолирована*, если часть E, сводящаяся к этой точке, является ее окрестностью, т. е. является открытой частью. В дискретной метрике каждая точка изолирована. В множестве $\mathbb{R}$ изолированных точек нет.

Пусть A — часть E. Окрестностью части A называется всякая часть E, которая содержит открытую часть, содержащую A. Если задано некоторое $\varepsilon > 0$, то окрестностью A порядка ε называется объединение всех шаров радиуса ε с центрами в точках из A. Это множество является окрестностью, так как оно содержит объединение всех отрытых шаров радиуса ε с центрами в точках из A, которое открыто и содержит A.

Теорема 1. *Для того чтобы некоторая часть A пространства E была открытой, необходимо и достаточно, чтобы она являлась окрестностью каждой своей точки.*

Доказательство. Пусть A является окрестностью каждой своей точки. Тогда вместе с каждой своей точкой множество A должно содержать некоторую открытую часть E, содержащую эту точку, т. е. A должно содержать некоторый шар с центром в рассматриваемой точке. Это означает, что A является открытой частью. Обратно, если часть A открыта и $a \in A$, то A всегда содержит некоторое открытое множество, содержащее a, а именно: саму часть A. Это означает, что A является окрестностью точки a.

Пусть задано семейство $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$ окрестностей точки a в E. Говорят, что это семейство является *фундаментальной системой окрестностей* точки a, если любая окрестность точки a содержит одну из окрестностей $\mathscr{V}_i$. Например, в метрическом пространстве E открытые шары (или замкнутые шары) с центром в a или шары с центром в a и рациональными радиусами образуют фундаментальную систему окрестностей точки a.

Внутренность

Пусть A — некоторая часть метрического пространства. *Внутренностью A* называется объединение всех открытых частей из E, содержащихся в A. Внутренность множества A обозначается через $\mathring{A}$. Множество $\mathring{A}$ есть открытое множество, содержащееся в A (свойство c), стр. 44) являющееся, очевидно, наибольшим открытым множеством, содержащимся в A. Конечно, $\mathring{A}$ может быть пусто (см. пример на стр. 50 при $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$).

Теорема 2. *Внутренность $\mathring{A}$ части A является множеством точек из E, каждая из которых является центром по крайней мере одного шара, содержащегося в A, или, иначе, это множество точек E, у которых имеются окрестности, целиком лежащие в A, или, иначе, это множество точек E, для которых A является окрестностью.*

Доказательство. В самом деле, пусть a является центром некоторого открытого шара, содержащегося в A. Этот шар является открытым множеством, содержащимся в A, а, значит, он содержится в $\mathring{A}$ и тем более $a \in \mathring{A}$.

Обратно, если $a \in \mathring{A}$, то в силу того, что $\mathring{A}$ открыто, найдется некоторый шар с центром в a, содержащийся в $\mathring{A}$ и тем более в A.

Внешность

Внешностью A называется внутренность его дополнения. Это — наибольшее открытое подмножество E, не пересекающееся с A. Внешность A является множеством всех точек E, каждая из которых есть центр по крайней мере одного шара радиуса >0, не пересекающегося с A. Внутренность и внешность A, очевидно, не пересекаются.

Граница

Множество точек E, не принадлежащих ни внутренности, ни внешности A, называется *границей* A и обозначается через $\dot{A}$.

Поскольку дополнение к границе, являясь объединением двух открытых частей, открыто, граница A замкнута.

Из свойств двух этих частей непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для того чтобы точка a принадлежала границе $\dot{A}$ множества A, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность a содержала бы одновременно как точки A, так и точки его дополнения.*

Доказательство. Прежде всего, если любая окрестность $\mathscr{V}$ точки a пересекается одновременно с частями A и $\complement A$, то она не содержится ни в одной из них. Но тогда a не лежит ни во внутренности, ни во внешности A и, следовательно, принадлежит границе A. Обратно, пусть a принадлежит границе и $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность a. Окрестность $\mathscr{V}$ пересекается с A, так как в противном случае она лежала бы в $\complement A$ и точка a принадлежала бы внешности. Точно так же видно, что окрестность $\mathscr{V}$ пересекается с $\complement A$, ибо в противном случае она лежала бы в A, а, значит, a принадлежала бы внутренности A.

Внутренность, внешность и граница части A попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с E.

Замыкание

Замыканием $\bar{A}$ части A называется пересечение всех замкнутых частей E, содержащих A. Оно замкнуто (свойство с'), стр. 45). Это — наименьшая замкнутая часть, содержащая A. Точка, принадлежащая замыканию, называется *точкой прикосновения части* A.

Теорема 4. *Замыкание множества A является объединением его внутренности и границы, иначе говоря, это дополнение к внешности A. Можно сказать также, что замыкание есть множество всех точек E, каждая окрестность которых пересекается с A*[1].

Доказательство. $\bar{A}$ является наименьшей замкнутой частью, содержащей A. Это утверждение эквивалентно тому, что $\complement\bar{A}$ является наибольшей открытой частью, содержащейся в $\complement A$, т. е. $\complement\bar{A}$ является внешностью A, а это как раз то, что требовалось доказать.

Пусть a — некоторая точка прикосновения части A. Тогда любая окрестность $\mathscr{V}$ точки a пересекается с A. В самом деле, в противном случае при $\mathscr{V} \subset \complement A$ нашлось бы открытое множество $\mathcal{O}$, содержащее a и содержащееся в $\mathscr{V}$, которое входит в $\complement A$. Но тогда $\mathcal{O}$, а вместе с ним и a принадлежали бы объединению всех открытых частей, содержащихся в $\complement A$, которое является внешностью A, что противоречит предположению $a \in \bar{A}$.

Обратно, если точка a такова, что каждая из ее окрестностей пересекается с A, то a не может лежать во внешности A, ибо в противном случае эта внешность была бы некоторой окрестностью a, не пересекающейся с A. Отсюда следует, что a принадлежит замыканию $\bar{A}$.

Мы доказали тем самым, что *a является точкой прикосновения части A тогда и только тогда, когда любая ее окрестность пересекается с A.*

Приведем несколько примеров. Пусть A — некоторый открытый или замкнутый шар с центром a и радиусом $R > 0$

[1]) В теореме 15 будет указана другая существенная характеристика замыкания.

в нормированном векторном пространстве. Его внутренностью является соответствующий открытый шар, его замыканием — соответствующий замкнутый шар, его внешностью — множество $\{x;\, d(a, x) > R\}$, а его границей — сфера с центром в a радиуса R. (Заметим, что, вообще говоря, это не всегда так. Если в E введена дискретная метрика и A — замкнутый шар радиуса 1, то он совпадает с E и, следовательно, со своей внутренностью, в то время как его граница и внешность пусты. Открытый шар радиуса 1 в этом случае вырождается в центр.)

Пусть A — множество рациональных чисел вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда $\mathring{A} = \emptyset$, $\dot{A} = \bar{A} = \mathbb{R}$.

Для того чтобы некоторая часть A пространства E была открытой, необходимо и достаточно, чтобы она совпадала со своей внутренностью.

Для того чтобы она была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы она совпадала со своим замыканием.

Плотные подмножества

Часть A метрического пространства E называется *плотной* в E, если каждая точка E является для нее точкой прикосновения, т. е. если ее замыкание совпадает с E. Это означает также, что любая открытая часть пространства E пересекается с A. Метрическое пространство E называется *сепарабельным*, если оно конечно или если оно содержит в себе некоторую счетную всюду плотную часть.

Примеры. В пространстве $\mathbb{R}$ с естественной метрикой множество A рациональных чисел и множество B иррациональных чисел плотны. Поскольку множество рациональных чисел счетно, то $\mathbb{R}$ сепарабельно.

Подпространства. Индуцированная метрика

Пусть F — некоторая часть метрического пространства E. Сужение функции расстояния, определенной в $E \times E$, на $F \times F$ превращает множество F в новое метрическое пространство. Его называют *метрическим подпространством* E, а определенную в нем метрику — «индуцированной» метрикой.

Пусть A — подмножество F. В этом случае следует четко различать свойство A быть открытым или замкнутым в F от аналогичного свойства в E. Так, например, множество F само по себе одновременно открыто и замкнуто, но если рассматривать F как подмножество E, то это утверждение, вообще говоря, не верно.

Теорема 5. *Для того чтобы некоторая часть A множества F была открытой (соответственно замкнутой) в метрическом пространстве F, необходимо и достаточно, чтобы она была пересечением F и некоторой открытой (замкнутой) части метрического пространства E.*

Для того чтобы некоторая часть A в метрическом пространстве F была окрестностью точки $a \in F$, необходимо и достаточно, чтобы она была пересечением F и некоторой окрестности a в E.

Доказательство. Обозначим через B шары пространства E и через β — шары пространства F.

Пусть A — часть F, являющаяся пересечением F и некоторой открытой части A_1 из E. Если $a \in F$ лежит в A, а, значит, и в A_1, то существует некоторый шар $B_0(a, R)$, принадлежащий A_1. Но тогда $\beta_0(a, R) = B_0(a, R) \cap F$ содержится в A. Это означает, что A открыто в F.

Обратно, пусть часть A открыта в F. Тогда A является (стр. 45) объединением некоторого семейства $\beta(a_i, R_i)$, $i \in I$, открытых шаров, причем $a_i \in A$ и $R_i > 0$. Объединение шаров $B_0(a_i, R_i)$ является открытым множеством A_1 из E и $A = A_1 \cap F$. Таким образом, свойство, относящееся к открытым множествам, доказано.

Пусть теперь A_1 — некоторая замкнутая часть E. Пусть C_1 — ее дополнение в E. Части A_1 и C_1 разбивают F на два взаимно дополнительных подмножества A и C множества F. Так как C открыто, то $A = A_1 \cap F$ замкнуто.

Обратно, пусть A — некоторая замкнутая часть F. Пусть C — ее дополнение в F. Так как C открыто, то в E существует такая открытая часть C_1, что $C_1 \cap F = C$. Пусть A_1 — дополнение к C_1 в E. Множество A_1 замкнуто. Поскольку A_1 и C_1 взаимно дополнительны в E, то их пересечения с F будут взаимно дополнительными в F. Так как $C_1 \cap F = C$, то $A = A_1 \cap F$. Из замкнутости A_1 теперь следует замкнутость A. Теорема доказана и в этом случае.

Пусть, наконец, $\mathscr{V}_1$ — некоторая окрестность точки $a \in F$ в E. Она содержит некоторую открытую часть A_1, содержащую a. Но тогда $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 \cap F_1$ содержит открытую часть $A = A_1 \cap F$ пространства F, содержащую a. Эта часть является окрестностью a в F. Обратно, пусть $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность a в F. Она содержит некоторую открытую часть A из F, содержащую a. В этом случае существует открытая часть A_1 из E, такая, что $A = A_1 \cap F$. Поскольку множество $\mathscr{V}_1 = A_1 \cup \mathscr{V}$ содержит открытую часть A_1, содержащую a, оно является некоторой окрестностью a в E, причем $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 \cap F$.

Из доказанного вытекают два следствия:

1°) Открытые, замкнутые части и, следовательно, окрестности метрического пространства F полностью определяются соответствующими множествами в E; для их определения не нужно знать функцию расстояния. В важности этого замечания мы убедимся позже (см. § 4).

2°) *Какова бы ни была часть F из E, если некоторая часть A из F открыта (соответственно замкнута) в метрическом пространстве E, то она открыта (замкнута) в метрическом подпространстве F; если A является окрестностью точки $a \in F$ в E, то она заведомо является окрестностью точки a в F.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, как показывает рассмотренный ранее случай $A = F$. Однако имеет место

Теорема 6. a) *Если F — открытая часть E, то любая часть A из F, открытая в метрическом пространстве F, также открыта в метрическом пространстве E.*

b) *Если F — замкнутая часть E, то любая часть A из F, замкнутая в метрическом пространстве F, также замкнута в метрическом пространстве E.*

c) *Если F является окрестностью точки a в E, то любая часть A из F, являющаяся окрестностью точки a в F, есть окрестность точки a в E.*

Доказательство. a) Пусть часть F открыта в E. Если A — открытая часть F, то, согласно теореме 5, существует часть A_1, открытая в E и такая, что $A = A_1 \cap F$. Поскольку A_1 и F открыты в E, то часть $A = A_1 \cap F$ также открыта в E. Отсюда сразу же вытекает утверждение c).

b) Доказательство аналогично. Достаточно всюду заменить открытые части на замкнутые.

§ 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ. ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство F. Говорят, что отображение f *непрерывно в точке $a \in E$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что неравенство $d(a, x) \leqslant \eta$ влечет за собой неравенство $d(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$.*

Можно также сказать иначе: *каким бы ни был шар с центром в $f(a)$, существует шар с центром в a, образ которого при отображении f содержится в предыдущем шаре.*

Можно также сказать, что, *какова бы ни была окрестность $\mathscr{V}$ точки $f(a)$, существует такая окрестность $\mathscr{U}$ точки a, что $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}$.*

Можно также сказать, что *прообраз при отображении f любой окрестности точки $f(a)$ является окрестностью точки a.*

Отображение E в F называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке a пространства E.