1°) Открытые, замкнутые части и, следовательно, окрестности метрического пространства F полностью определяются соответствующими множествами в E; для их определения не нужно знать функцию расстояния. В важности этого замечания мы убедимся позже (см. § 4).

2°) *Какова бы ни была часть F из E, если некоторая часть A из F открыта (соответственно замкнута) в метрическом пространстве E, то она открыта (замкнута) в метрическом подпространстве F; если A является окрестностью точки $a \in F$ в E, то она заведомо является окрестностью точки a в F.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, как показывает рассмотренный ранее случай $A = F$. Однако имеет место

Теорема 6. a) *Если F — открытая часть E, то любая часть A из F, открытая в метрическом пространстве F, также открыта в метрическом пространстве E.*

b) *Если F — замкнутая часть E, то любая часть A из F, замкнутая в метрическом пространстве F, также замкнута в метрическом пространстве E.*

c) *Если F является окрестностью точки a в E, то любая часть A из F, являющаяся окрестностью точки a в F, есть окрестность точки a в E.*

Доказательство. a) Пусть часть F открыта в E. Если A — открытая часть F, то, согласно теореме 5, существует часть A_1, открытая в E и такая, что $A = A_1 \cap F$. Поскольку A_1 и F открыты в E, то часть $A = A_1 \cap F$ также открыта в E. Отсюда сразу же вытекает утверждение c).

b) Доказательство аналогично. Достаточно всюду заменить открытые части на замкнутые.

§ 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ. ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство F. Говорят, что отображение f *непрерывно в точке $a \in E$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\eta > 0$, что неравенство $d(a, x) \leqslant \eta$ влечет за собой неравенство $d(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$.*

Можно также сказать иначе: *каким бы ни был шар с центром в $f(a)$, существует шар с центром в a, образ которого при отображении f содержится в предыдущем шаре.*

Можно также сказать, что, *какова бы ни была окрестность $\mathcal{V}$ точки $f(a)$, существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки a, что $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.*

Можно также сказать, что *прообраз при отображении f любой окрестности точки $f(a)$ является окрестностью точки a.*

Отображение E в F называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке a пространства E.

Первое определение непрерывности существенно использует метрику. Напротив, два последних определения используют только открытые множества и окрестности, а не саму метрику. Важность этого замечания будет ясна в дальнейшем (см. § 4).

Пример. Функция $1/x$, т. е. отображение $x \to 1/x$ метрического пространства E, дополнительного к началу координат вещественной прямой, в метрическое пространство $F = \mathbb{R}$ (вещественная прямая) всюду непрерывно.

Теорема 7. *Для того чтобы отображение f метрического пространства E в метрическое пространство F было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз при отображении f любой открытой части F был открытой частью в E.*

Доказательство. Докажем сначала, что это условие необходимо. Предположим, что отображение f непрерывно. Пусть B — открытая часть F и $A = f^{-1}(B)$. Пусть $a \in A$. Так как отображение f непрерывно в точке a и B является окрестностью $f(a)$, то часть A будет окрестностью точки a. Итак, A является окрестностью каждой своей точки, а это значит, что A открыто (теорема 1).

Докажем теперь его достаточность. Предположим, что прообраз при отображении f любой открытой части F открыт в E. Пусть a — произвольная точка E и $\mathscr{V}$ — окрестность точки $f(a)$ в F. Тогда $\mathscr{V}$ содержит некоторую открытую часть B, содержащую точку $b = f(a)$. Прообраз $f^{-1}(\mathscr{V})$ содержит открытую часть $f^{-1}(B)$, содержащую a. Значит, $f^{-1}(\mathscr{V})$ является окрестностью точки a, что доказывает непрерывность отображения f в точке a.

Теорема 8. *Для того чтобы отображение f метрического пространства E в метрическое пространство F было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз при отображении f каждой замкнутой части F был замкнут в E.*

Доказательство повторяет доказательство предыдущей теоремы. Надо лишь везде заменить открытые части из E и F на их замкнутые дополнения и применить формулу (I, 2; 3).

Замечание. Если в двух предыдущих теоремах заменить прообразы на прямые образы, то можно прийти к неверным результатам. Рассмотрим, например, постоянное отображение E в F. Такое отображение, очевидно, непрерывно. Однако, образ любой открытой части E, в том числе и самого множества E, сводится к единственной точке F, а подмножества, вырождающиеся в точку, вообще говоря, не являются открытыми. Если рассмотреть функцию $1/x$ из разобранного выше примера, то образ всего множества E, т. е. некоторого замкнутого множества при этом отображении, является в множестве $F = \mathbb{R}$

дополнением к началу координат, не являющимся замкнутым в $\mathbb{R}$.

Теорема 9. *Норма в нормированном векторном пространстве E, рассматриваемая как отображение E в прямую $\mathbb{R}$ с естественной метрикой, является непрерывной функцией.*

Доказательство. Из (II, 1; 6) вытекает, что для заданного $\varepsilon > 0$ достаточно выбрать $\eta = \varepsilon$, чтобы из неравенства $\|x - a\| \leqslant \eta$ вытекало неравенство $|\|x\| - \|a\|| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 10. *Композиция двух непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Пусть E, F, G — три метрических пространства и $h = g \circ f$ — композиция отображения f пространства E в F и отображения g пространства F в G. Будем считать, кроме того, что функция f непрерывна в точке $a \in E$, а функция g непрерывна в точке $b = f(a)$ пространства F.

Пусть $c = g(b) = h(a)$ и $\mathscr{W}$ — окрестность точки c в G. Так как функция g непрерывна в точке b, то прообраз $\mathscr{V} = g^{-1}(\mathscr{W})$ является окрестностью b в F. Поскольку f непрерывна в a, то прообраз $\mathscr{U} = f^{-1}(\mathscr{V})$ является окрестностью a в E. Из того, что $\mathscr{U} = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{W}))$ совпадает с прообразом $h^{-1}(\mathscr{W})$, следует непрерывность h в точке a[1]). Отсюда, очевидно, вытекает, что если f и g всюду непрерывны, то h тоже всюду непрерывна. Этот факт можно было бы получить непосредственно, если применить теорему 7 или теорему 8.

Гомеоморфизмы

Гомеоморфизмом метрического пространства E на метрическое пространство F называется любая биекция E на F, непрерывная вместе со своей обратной биекцией.

Теорема 11. *Для того чтобы биективное и непрерывное отображение f пространства E в F было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении f каждой открытой части E был открытым в F; необходимо и достаточно также, чтобы образ при отображении f каждой замкнутой части E был замкнутым в F.*

В самом деле, эти образы есть не что иное, как прообразы относительно обратной биекции $g = f^{-1}$, и предыдущие условия совпадают с условиями непрерывности f^{-1}, указанными в теореме 7 и теореме 8.

---

[1]) В качестве упражнения проведите другое доказательство, пользуясь первым (метрическим) определением непрерывности с помощью $\forall\varepsilon$, $\exists\eta$, ...

Замечание. Не надо думать, что любая непрерывная биекция является заведомо гомеоморфизмом. Так, например, если E является прямой $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой, а F — прямой $\mathbb{R}$ с естественной метрикой, то тождественное отображение E в F непрерывно и биективно, но не является гомеоморфизмом.

Говорят, что два метрических пространства E и F *гомеоморфны*, если существует по крайней мере один гомеоморфизм E на F. В этом случае оба пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, т. е. свойствами, относящимися к открытым, замкнутым множествам и окрестностям.

Пример. Внутренность круга и внутренность треугольника в евклидовой плоскости являются гомеоморфными метрическими пространствами. Полуплоскость $y > 0$, область $y > x^2$, расположенная над параболой $y=x^2$, область $y < x^2$, лежащая под этой параболой на плоскости $\mathbb{R}^2$, гомеоморфны [1]).

Два метрических пространства, определенных кривыми, изображенными на следующем ниже рисунке, гомеоморфны:

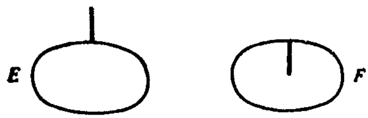

Рис. 1.

Однако внимание! Это вовсе не означает, что существует гомеоморфизм первой плоскости на вторую, переводящий первое подпространство на второе!

Вещественная прямая с естественной метрикой и вещественная прямая с дискретной метрикой не гомеоморфны потому, что в последнем случае все подмножества открыты, а в первом случае это не так [2]).

§ 4. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Используя лишь понятие расстояния, мы смогли определить в метрическом пространстве E понятия открытого и замкнутого множеств, окрестности, замыкания, внутренней и внешней части множества, его границы, плотного множества, непрерывного

[1]) В качестве упражнения укажите в каждом случае гомеоморфизм соответствующих гомеоморфных метрических пространств.

[2]) Мы показали выше, что в данном случае тождественное преобразование не является гомеоморфизмом между двумя рассматриваемыми пространствами. Здесь же мы показали, что между ними не существует никакого гомеоморфизма, — это более сильное утверждение.